Engineering management 5 (1) (2019) 30-39

Engineering management

PRIMENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA ZA REŠAVANJE PROBLEMA MEŠOVITIH MATRIČNIH IGARA *

Nikola Balašević
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Odsek za inženjerski menadžment
Bor, Srbija

Izvod

Simpleks metoda linearnog programiranja primenjena je na konkretnom slučaju. Primenom date metode dobijene su optimalne strategije igrača i vrednost igre. Dobijeni rezultati su potvrđeni pomoću LINDO v.6.1. softverskog paketa. Cilj ovog rada je pokazati širok spektar moguće primene Simpleks metode, rešavanjem konkretnog problema iz ekonomije i postepenom primenom metodologije, kao i pronalaženje optimalnih strategija igrača i objašnjenje njene primene.

Ključne reči: *Simpleks metoda, Linearno programiranje, Matrične igre, Optimalne strategije*

1. UVOD

Matematički modeli i metode došli su u žižu interesovanja nakon Drugog svetskog rata, a naročito sa razvojem linearnog programiranja kojim je omogućeno rešavanje složenih ekonomskih problema. Ovaj razvoj dešava se u pravom trenutku, kada je ratnu privredu trebalo prilagoditi uslovima mira i tako ući u tržišnu utakmicu u kojoj se stalno postavljaju novi kriterijumi u vidu izbora investicija, ciljnog tržišta i optimalne potrošnje. U takvim uslovima, nije bilo pametno služiti se parcijalnim analitičkim postupcima i klasičnim instrumentima, s toga je započeto sistematsko izučavanje novih matematičkih metoda, posebno linearnog programiranja (Vanderbei, 2000). Jedna od metoda linearnog programiranja koja je izabrana kao metodologija u ovom radu jeste Simpleks metoda. Simpleks metodom dolazi se do optimalnih strategija posmatranih učesnika igre, koji se nalaze u međusobnom konfliktu. Osnova metode je zamena ograničenja postavljenog nejednačinom odgovarajućom jednačinom. U prvom delu rada obrađene su osnove teorije igara, posebno aspekti koji se tiču mešovitih matričnih igara, kao i osnove linearnog programiranja za rešavanje problema iz oblasti matričnih igara višeg reda. Drugi deo rada zasniva se na samoj primeni Simpleks metode linearnog programiranja u postupku rešavanja konkretnog zadatka iz prakse iz domena mešovitih igara, a sa ciljem da se ukaže na praktičnu primenu pomenute metode u ovoj oblasti.

2. TEORIJSKE OSNOVE

2.1. Mešovite matrične igre

Mešovita matrična igra javlja se u slučajevima kada matrica plaćanja nema sedlastu tačku, pa je tada nešto teže odrediti optimalne strategije igrača i vrednost igre. Zapravo, u tom

* *Rad saopšten na XV Studentskom simpozijumu o strategijskom menadžmentu*

slučaju igrač A nema čistu strategiju kojom bi obezbedio minimalni zagarantovani dobitak uz racionalno ponašanje drugog igrača. Shodno tome, igrač B nema strategiju kojom osigurava maksimum koji mora da plati. Tada igrači uvode elemente slučajnosti kod svojih izbora, više ne biraju po jednu strategiju već se odlučuju za različite strategije od kojih svaka ima određenu verovatnoću odigravanja (Jovanović, 2016).
Ukoliko posmatramo igrača A, vidimo da on na raspolaganju ima m alternativa (strategija, poteza) i svaku od njih bira sa određenom verovatnoćom p_1, p_2, p_3, ..., p_m, pri čemu one kao takve zadovoljavaju sledeće uslove:

$$p_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \tag{2}$$

Vektor $P = (p_1, p_2, p_3, ..., p_m)$ naziva se mešovitom strategijom igrača A, pri čemu najmanje dve verovatnoće u vektoru moraju biti različite od nule (Petković, 2016).
Kod igrača B vidimo da on ima na raspolaganju n alternativa i za svaku se odlučuje sa određenom verovatnoćom. Verovatnoće za izbor njegovih strategija označavaju se sa q_1, q_2, q_3, ..., q_n, a uslove koje te verovatnoće moraju zadovoljiti su sledeći (Jovanović, 2016):

$$q_j \geq 0,\ j = 1,2, ..., n \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{4}$$

Vektor $Q = (q_1, q_2, q_3, ..., q_n)$ naziva se *mešovitom strategijom igrača B*, pri čemu, najmanje dve verovatnoće u vektoru moraju biti različite od nule. Kada oba igrača upotrebljavaju mešovite strategije P i Q, onda vrednost igre neće odgovarati samo vrednosti jednog elementa matrice plaćanja. Igrač A će dobiti iznos a_{ij} od igrača B samo ako odabere i-tu alternativu, a igrač B j-tu alternativu. Verovatnoća da igrač A odabere i-tu alternativu jednaka je p_i, a verovatnoća da igrač B izabere j-tu alternativu jednaka je q_j.

Kako igrač A želi da izborom svoje strategije uveća vrednost igre, a igrač B da istu što više smanji, oni iz tog razloga biraju svoje optimalne strategije. Rešenje mešovite igre je par optimalnih strategija P^* (za igrača A) i Q^* (za igrača B), koje poseduju osobinu da ako se jedan od učesnika igre pridržava svoje optimalne strategije, onda ni drugom ne odgovara da odstupa od svoje optimalne strategije. To znači da je ispunjen naredni uslov za sve moguće vrednosti vektora P i Q (Jovanović, 2016):

$$\mathrm{E}(P, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q) \tag{5}$$

Predstavljena relacija podrazumeva da ako igrač A koristi optimalnu strategiju P^*, on osigurava da mu srednji dobitak bude najmanje $\mathrm{E}(P^*,Q^*)$, pod uslovom da igrač B odabere svoju optimalnu strategiju Q^* . Takođe, igrač B izborom optimalne strategije Q^* osigurava da njegov srednji gubitak ne bude veći od $\mathrm{E}(P^*,Q^*)$, u slučaju da igrač A odabere svoju optimalnu strategiju P^* (Jovanović, 2016).
Dakle, vektori P^* i Q^* predstavljaju rešenje matrične igre i tzv. optimalne mešovite strategije, na osnovu kojih se vrednost igre v može odrediti na sledeći način:

$$\mathrm{E}(P, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q^*) \leq \mathrm{E}(P^*, Q) \tag{5}$$

$$v = \mathrm{E}(P^*, Q^*) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \tag{6}$$

2.2. Rešavanje mešovitih matričnih igara primenom Simpleks metode linearnog programiranja

Linearno programiranje predstavlja jedan od najinteresantnijih metoda optimizacije i rešavanja problema, ne samo u domenu teorije igara, već i u mnogim drugim oblastima. Velikom broju svetskih problema formulisan je linearni karakter, što je i doprinelo tome da primena linearnog programiranja ima veliki značaj u njihovom rešavanju. Razvoj algoritma Simpleks metode se, pored ostalih, vezuje i za ime čuvenog matematičara Dantziga (Dantzig) koji je svojim fundamentalnim radom „*Maksimiziranje linearne forme podvrgnute ograničenjima u vidu sistema linearnih jednačina (nejednačina)*“ postavio osnove savremenog programiranja. Ovaj rad je nastao u okviru grupe „SCOOP“ (*engl.* Scientific Computation of Optimal Programs), koju je organizovala vojska SAD-a sa zadatkom da se razmotre mogućnosti rešavanja nekih vojno-strateških problema matematičkim putem (Bixby, 2002).
Postupak formiranja matematičkog modela pri primeni linearnog programiranja za rešavanje mešovitih matričnih igara polazi od definisane matrice plaćanja. Optimalna strategija P^* igrača *A* ima osobinu da on njome dobija najminimalnija vrednost igre v, bez obzira na to koju strategiju odabere igrač *B*. Od očekivanih srednjih vrednosti dobitaka igrača *A*, za pojedine čiste strategije igrača *B*, formira se sledeći sistem nejednačina:

Funkcija cilja čiji maksimum treba odrediti je:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 * x_1 + \cdots + c_n * x_n \tag{7}$$

Sistem nejednačina ograničenja je:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{gathered} \tag{8}$$

Ovom sistemu nejednačina dodaju se i uslovi koje moraju zadovoljiti verovatnoće p_i :

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \tag{9}$$

$$p_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

Ovaj sistem nejednačina prevodi se u sistem jednačina uvođenjem dopunskih promenljivih:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} \leq b_m \end{gathered} \tag{11}$$

Dopunske promenljive ne uvode se samo zarad forme, već imaju i svoj fizički smisao jer predstavljaju razliku između raspoloživih i iskorišćenih kapaciteta, vremenskih resursa (Jovanović, 2005). Funkcija cilja uvođenjem dopunskih promenljivih dobija sledeći oblik:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0 * (x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}) \quad (12)$$

Na osnovu ovako postavljenog modela formira se nulta simpleks tabela (Tabela 1), koja je predstavljena u nastavku.

Tabela 1. Prikaz početne simpleks tabele ST_0

Bazne promenljive			**Slobodne promenljive**								
C			C_1	C_2	...	C_n	0	0	0	0	ϴ=b/ a_{ij}
$\boldsymbol{C_b}$	$\boldsymbol{X_b}$	**B**	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}	
0	X_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	
0	X_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	0	0	...	1	
0	X_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	
$F_j - c_j$		0	$F_1 - c_1$	$F_2 - c_2$		$F_n - c_n$	0	0	0	0	

Oznake u početnoj simpleks tabeli su:
- C - vektor koeficijenata uz promenljive x_j funkcije kriterijuma;
- C_b – vektor koeficijenata u finkciji kriterijuma uz promenljive koje sačinjavaju bazno dopustivo rešenje. Kod max ST-0 vrednost ovih koeficijenata je 0;
- X_b – vektor promenljivih bazno dopustivih rešenja;
- B – vektor vrednosti promenljivih bazno dopustivog rešenja za posmatranu iteraciju;
- X_j – množitelji vektora baze;
- $F_j - c_j$ – kriterijum optimalnosti.

Na osnovu kriterijuma optimalnosti, rešenje je optimalno u slučaju kada je:
$F_j - c_j \geq 0\ za\ \forall j$, u suprotnom kada rešenje nije optimalno, određuje koji vektor ulazi u bazu, a ulazi onaj za koji važi da je $\min(F_j - c_j)\ za\ one\ vrednosti\ za\ koje\ je\ F_j - c_j < 0$ (Jovanović, 2005).
Na osnovu „teta“ kriterijuma određuje se koji vektor izlazi iz baze:

$$\theta = min\frac{b_j}{a_{ij}} \quad (13)$$

Transformacija elemenata van vodećeg reda i kolone izvodi se na sledeći način:

$$a_{ij} \rightarrow \widehat{a_{ij}} = a_{ij} - \frac{a_{uj} * a_{ip}}{a_{up}} \quad (14)$$

Transformacija elemenata u vodećoj koloni, izuzimajući vodeći element:

$$a_{ip} \rightarrow \widehat{a_{ip}} = 0 \quad (15)$$

Transformacija elemenata u vodećem redu:

$$a_{uj} \to \widehat{a_{up}} = \frac{a_{uj}}{a_{up}} \tag{16}$$

Transformacija vodećeg elementa:

$$a_{up} \to \widehat{a_{up}} = 1 \tag{17}$$

3. REŠAVANJE PRAKTIČNOG PRIMERA

3.1. Definisanje problema

Kao što je poznato, primene Simpleks metode linearnog programiranja su zaista široke. Za potrebe ovog rada iskorišćen je sledeći primer iz privrede. Automobilski koncern Volkswagen je 2018. godine bio i zvanično najveći proizvođač putničkih automobila na svetu, ostavivši iza sebe Toyota-u i Renault Nissan grupaciju. Volkswagen poseduje ukupno 12 brendova, od toga 8 čine proizvođači putničkih automobila. Volkswagen grupa je u 2018. godini ukupno isporučila 10 101 297 putničkih vozila što znači rast od 0.6% na svetskom tržištu u odnosu na 2017. godinu. Veliku zaslugu za to, pored samog brenda Volkswagen, imaju i brendovi Škoda i Seat koji su svojim novim i pristupačnim modelima iz SUV segmenta doprineli ukupnom prodajnom rezultatu grupe, kao i brzo rastuća tržišta na kojima je grupacija ostvarila solidan tržišni udeo (Volkswagen, 2019). U tabeli 2 prikazan je tržišni udeo (izražen u procentima) na relevantnim tržištima brendova putničkih automobila Volkswagen koncerna.

Tabela 2. Procentualni udeo automobilskih brendova na svetskom tržištu

	Zapadna Evropa	Centralna i Istočna Evropa	Turska	Južna Afrika	Severna Amerika	Azija-Pacifik
Volkswagen	11.00%	4.00%	7.00%	1.70%	5.70%	5.40%
Audi	2.00%	1.00%	1.40%	0.60%	0.70%	3.00%
Škoda	7.00%	10.00%	9.00%	3.70%	0.00%	0.90%
Seat	2.00%	5.00%	5.00%	3.90%	0.07%	0.30%
Bentley	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.08%	0.20%
Lamborghini	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.08%	0.20%
Porsche	0.70%	1.00%	0.06%	0.01%	1.00%	0.80%
Bugatti	0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%

S obzirom na odlične rezultate koji su ostvareni u prethodnoj fiskalnoj godini i trendove koji predviđaju rast određenih svetskih tržišta ali i određenih brendova u okviru grupacije, odlučeno je da se iznos od 750 000 000 USD raspodeli brendovima u okviru grupacije. Iznos je namenjen ostvarenju strategija povećanja prisustva na tržištu. Kako bi se donela odluka o tome kako rasporediti sredstva, odnosno kojim brendovima povećati prisustvo na kojim tržištima primenjena je Simpleks metoda linearnog programiranja.

3.2. Rešavanje problema primenom Simpleks metode

U prvom koraku na osnovu izloženog problema konstruisana je relevantna matrica plaćanja, pri čemu su vrednosti u matrici izražene u %.

Tabela 3. Matrica plaćanja

		Igrač B					
	tržište / brend	Zapadna Evropa **(b1)**	Centralna i Istočna Evropa **(b2)**	Turska **(b3)**	Južna Afrika **(b4)**	Severna Amerika **(b5)**	Azija-Pacifik **(b6)**
Igrač A	Volkswagen **(a1)**	11	4	7	1.7	5.7	5.4
	Audi **(a2)**	2	1	1.4	0.6	0.7	3
	Škoda **(a3)**	7	10	9	3.7	0	0.9
	Seat **(a4)**	2	5	5	3.9	0.07	0.3
	Bentley **(a5)**	0.02	0.01	0.01	0	0.08	0.2
	Lamborghini **(a6)**	0	0.01	0	0	0.08	0.2
	Porsche **(a7)**	0.7	1	0.06	0.01	1	0.8
	Bugatti **(a8)**	0.02	0	0	0	0	0.01

Za tako definisanu početnu matricu plaćanja, procesom redukcije, problem matrične igre sveden je sa dimenzija 8x6 na dimenziju 3x3, na način da su međusobnim poređenjem alternativa prema igračima eliminisane sve irelevantne strategije, koje kao takve nikada ne bi bile izabrane kao optimalne. Postupak redukcije izvršen je po igraču A i po igraču B.

U daljem postupku, za redukovanu matricu plaćanja potrebno je odrediti gornju i donju vrednost matrične igre primenom Valdovog kriterijuma, odnosno proveriti da li je u domenu prostih matričnih igara i da li ima sedlastu tačku.

Tabela 4. Primena Valdovog kriterijuma

				min	max(min)
	1.7	5.7	5.4	1,7	1,7
	3.7	0	0.9	0	
	3.9	0.07	0.3	0,07	
max	3.9	5.7	5.4		
min(max)	3.9				

Kako u ovom slučaju ne postoji sedlasta tačka, može se zaključiti da se rešavanje problema nalazi u domenu mešovitih matričnih igara višeg reda (3x3), pri čemu se vrednost igre kreće u opsegu 1,7 ≤ v ≤ 3,9 %. Za konkretno izračunavanje vrednosti igre i određivanje optimalnih strategija za oba igrača neophodno je primeniti metod linearnog programiranja i postaviti adekvatan matematički model prema jednom od učesnika igre. Iz tehničkih razloga lakše je definisati matematički model prema igraču B, pošto se u postupku primene Simpleks metode uvode samo dopunske promenjive. Primenom jednačine (7) i nejednačine (8) dobija se sledeći finalni matematički model:

Funkcija cilja: $\max F(X) = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v}$

Ograničenja: $1{,}7x_1 + 5{,}7x_2 + 5{,}4x_3 \leq 1$

$$3{,}7x_1 + 0x_2 + 0{,}9x_3 \leq 1$$
$$3{,}9x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}3x_3 \leq 1$$

Nakon što se izvrši prilagođavanje matematičkog modela za primenu Simpleks metode linearnog programiranja kao u jednačinama (11) i (12), dobija se:

$$\max F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) = \frac{1}{v}$$
$$1{,}7x_1 + 5{,}7x_2 + 5{,}4x_3 + x_4 \le 1$$
$$3{,}7x_1 + 0x_2 + 0{,}9x_3 + x_5 \le 1$$
$$3{,}9x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}3x_3 + x_6 \le 1$$

Kroz tri iteracije došlo se i do odgovarajućeg relevantnog rešenja postavljenog problema:

Tabela 5. Nakon treće iteracije - simpleks tabela ST_3

C			1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
cb	xb	B	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0.00	x2	0.02	0.00	1.00	0.00	0.16	-1.37	1.23
0.00	x3	0.09	0.00	0.00	1.00	0.02	1.48	-1.41
1.00	x1	0.25	1.00	0.00	0.00	0.00	-0.09	0.34
fj-cj		0.36	0.00	0.00	0.00	0.17	0.02	0.17

Optimalno rešenje primarnog modela je: X^* = [0,25; 0,02; 0,09; 0; 0;0]. Maksimalna vrednost funkcije cilja iznosi: *max*F(*x*) = 0,36. Kako važi da je *max*F(*x*) = 1/*v*, onda se lako može dobiti i vrednost matrične igre:

$$v = \frac{1}{max\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{0{,}36} = 2{,}78$$

S obzirom na ranije uvedenu smenu: $\frac{q_j}{v} = x_j$, iz koje se određuje: $q_j = v \cdot x_j$, dobijaju se sl. vrednosti vektora *Q**:

$q_1 = v \bullet x_1 = 2{,}78 \bullet 0{,}25 = 0{,}70$

$q_2 = v \bullet x_2 = 2{,}78 \bullet 0{,}02 = 0{,}06$

$q_3 = v \bullet x_3 = 2{,}78 \bullet 0{,}09 = 0{,}25$

pa je: $Q^* = (q_1^*, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*, q_6^*)$ = (0; 0; 0; 0,70; 0,06; 0,25;).

Optimalno rešenje dualnog modela je: Y^* = [0,17; 0,02; 0,17; 0; 0; 0].

Pošto je izvršena smena u matematičkom modelu za prvog igrača: $\frac{p_i}{v} = y_i$, dobija se da je: $p_i = v \cdot y_i$. Tada se vrednosti vektora *P** dobijaju na sledeći način:

$p_1 = v \bullet y_1 = 2{,}78 \bullet 0{,}17 = 0{,}47$

$p_2 = v \bullet y_2 = 2{,}78 \bullet 0{,}02 = 0{,}06$

$p_3 = v \bullet y_3 = 2{,}78 \bullet 0{,}17 = 0{,}47$

pa je: $P^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*, p_7^*, p_8^*)$ = (0,47; 0; 0,06; 0,47; 0; 0; 0; 0).

3.3. Rešavanje definisanog problema primenom programskog paketa LINDO

Kako se postavljeni problem iz domena linearnog programiranja može na vrlo jednostavan način rešiti i primenom programskog paketa LINDO, a u cilju ukazivanja na gotovo identične rezultate koji bi se njime dobili, izvršeno je i softversko rešavanje postavljenog praktičnog primera prema igraču *B*.

Primenjena LINDO sintaksa sa prethodno determinisanim matematičkim modelom data je u nastavku:

```
!OVO JE FUNKCIJA CILJA
MAX X1+X2+X3
!OVO SU OGRANIČENJA
1.7X1+5.7X2+5.4X3<=1
3.7X1+0X2+0.9X3<=1
3.9X1+0.07X2+0.3X3<=1
END
```

Na osnovu ovako definisanog matematičkog modela, dobijena su sledeća rešenja posredstvom LINDO programskog paketa:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
      1)    0.3550079
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X1        0.249474         0.000000
      X2        0.020038         0.000000
      X3        0.085496         0.000000
     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000          0.173396
      3)        0.000000          0.015296
      4)        0.000000          0.166316
 NO. ITERATIONS =       3
```

Na osnovu ovih rezultata dobijena su sledeća rešenja:

Za primarni model:

X^* = [0.249474; 0.020038; 0.085496; 0; 0;0]

$$v = \frac{1}{max\mathrm{F}(x)} = \frac{1}{0{,}3550079} = 2{,}82$$

Q^* = ($q_1{}^*$, $q_2{}^*$, $q_3{}^*$, $q_4{}^*$, $q_5{}^*$, $q_6{}^*$) = (0; 0; 0; 0,70; 0,06; 0,24;).

Za dualni model:

Y^* = [0.173396; 0.015296; 0.166316; 0; 0; 0].

P^* = ($p_1{}^*$, $p_2{}^*$, $p_3{}^*$, $p_4{}^*$, $p_5{}^*$, $p_6{}^*$, $p_7{}^*$, $p_8{}^*$) = (0,49; 0; 0,04; 0,47; 0; 0; 0; 0).

3.4. Vrednovanje dobijenih rezultata

Rezultati dobijeni posredstvom LINDO programskog paketa predstavljaju tačnije podatke, zaokruženi su na više decimala od podataka dobijenih kroz iteracije, i kao takvi pogodniji su za primenu prilikom raspodele dobiti.
U sledećoj tabeli nalazi se obrazloženje primene dobijenih rezultata:

Tabela 6. Raspodela novčanih sredstava

		Južna Afrika (b4)	**Severna Amerika (b5)**	**Azija-Pacifik (b6)**	∑
	Verovatnoća	q4= 0,70	q5=0,06	q6=0,24	
Volkswagen (a1)	p1=0,49	257.250.000	22.050.000	88.200.000	367.500.000
Škoda (a3)	p3=0,04	21.000.000	1.800.000	7.200.000	30.000.000
Seat (a4)	p4=0,47	246.750.000	21.150.000	84.600.000	352.500.000
∑		525.000.000	45.000.000	180.000.000	∑=750.000.000 USD

4. DISKUSIJA REZULTATA

Na osnovu dobijenih rezultata moguće je dati predlog rešenja problema obrađenog u ovom radu. Mora se uzeti u obzir da predložena raspodela sredstava predstavlja rezultate praktične primene teorijske metode i kao takva u stvarnim tržišnim uslovima odlučivanja može predstavljati odličan alat za pomoć menadžerima pri odlučivanju. Menadžeri su ti koji donose odluke, i u tom procesu moraju uzeti u obzir trendove kao i brojne druge faktore pri donošenju ovakvih odluka. Međutim, kada bi se pri donošenju odluke menadžer služio isključivo rezultatima dobijenim u ovom radu, odluka bi bila sledeća:
U početnoj matrici predstavljen je udeo svih 8 brendova koncerna na 6 relevantnih svetskih tržišta. Shodno tom udelu, a putem odabrane metode, odlučeno je da su najbitniji brendovi Volkswagen, Škoda i Seat, dok su najbitnija tržišta Južna Afrika, Severna Amerika i Azijsko- Pacifičko tržište. Prema brendovima, sredstva se raspoređuju u sledećem odnosu: 49%, 4% i 47% respektivno. Prema tržištima: 70%, 6% i 24% respektivno.

5. ZAKLJUČAK

Primenjena Simpleks metoda linearnog programiranja, pokazala je koliki značaj može imati primena ovakve metodologije prilikom rešavanja problema koji spadaju u domen mešovitih matričnih igara. Dijapazon moguće primene je širok i obuhvata brojne aspekte ljudskog delovanja u kojima je potrebno donositi odluke. U privredi je moguće rešiti probleme koji su postavljeni kao: maksimiziranje dobiti; maksimalno korišćenje proizvodnih kapaciteta; maksimalan izvoz; minimalni troškovi proizvodnje; minimalni obim zaliha i dr.
Takođe, može se zaključiti i da se korišćenjem modernih programskih paketa vrlo jednostavno i brzo dolazi do potrebnih podataka, odnosno rešenja. Međutim, zarad uspešne interpretacije dobijenih podataka potrebno je da korisnik poseduje određena znanja iz odgovarajućih oblasti. Ovim radom prikazan je značaj poznavanja teorijskih metoda, njihove pravilne aplikacije i interpretacije rezultata od strane menadžera u postupku donošenja odluka u tržišnim uslovima.

APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING FOR SOLVING PROBLEMS OF MIXED MATRIX GAMES

Nikola Balašević
University of Belgrade, Technical faculty in Bor, Engineering Management Department
Bor, Serbia

Abstract

Linear programming's Simplex method was applied on a specific case. By applying the given method, optimal strategies of the players and the value of the game have been obtained. The obtained results were verified using the LINDO v.6.1. software package. The aim of this paper is to show the broad range of possible application for the Simplex method, through solving a specific problem from the economy and gradually applying the methodology, and to find the optimal strategies of the players and explain its application.

Keywords: *simplex method, linear programming, matrix games, optimal strategies*

LITERATURA / REFERENCES

Vanderbei, R.J. (2000). Linear programming: Foundations and Extensions, Princeton University.

Jovanović, I. (2016). Operaciona istraživanja II - teorija igara, Autorizovana predavanja, Tehnički fakultet u Boru, Bor.

Petković, N. (2016). Matematički modeli optimizacije poslovnih procesa, Doktorska disertacija, Fakultet za menadžment, Zaječar, p. 79.

Bixby, R.E. (2002). Solving real-world linear programs: a decade and more of progress, INFORMS.

Jovanović, A. (2005). Metode operacionih istraživanja, Tehnički fakultet u Boru, Bor.

Volkswagen, (2019). dostupno na (https://www.volkswagenag.com) pristupljeno na dan 10.04.2019.