Engineering management 6 (1) (2020) 42-52

Engineering management

PRIMENA DIREKTNIH METODA MEŠOVITIH MATRIČNIH IGARA NA PRIMERU POLJOPRIVREDNE PROIZVODNJE

Aleksandra Radić

Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Odsek za inženjerski menadžment
Bor, Srbija

Izvod

Savremena tendencija nauke jeste razvoj takvih metoda, alata i postupaka koji će se moći primeniti u brojnim granama nauke. Ovaj rad nastao je sa težnjom da pokuša da kroz primenu posebnih, direktnih metoda mešovitih matričnih igara, pojednostavi proces odlučivanja i nagođenja u primarnim sektorima privrede, preciznije u poljoprivredi. Za te potrebe korišćen je hipotetički primer poljoprivrednog gazdinstva i njenih kupaca. Rezultati, bazirani na primeni Waldovog kriterijuma, govore u prilog mogućnosti primene mešovitih matričnih igara u poljoprivrednoj proizvodnji, tačnije odabiru poljoprivrednih kultura za zasad i praktičnosti modela iz razloga što je primenom svih metoda korišćenih u radu dobijen isti krajnji rezultat.

Ključne reči: *Mešovite matrične igre, Poljoprivreda, Direktne metode, Waldov kriterijum*

1. UVOD

Antagonistički (suprotstavljeni) interesi su vrlo prisutni u svakodnevnom životu. Posebna grana nauke koja pokušava da egzaktnim matematičkim metodama i algoritmima opiše ponašanje učesnika u suportstavljenim situacijama naziva se Teorija igara. Igra je realni model konfliktne situacije (Jovanović, 2016), ili takmičarska situacija između N osoba ili grupa koje se nazivaju igrači sa unapred određenim setom pravila i unapred poznatim plaćanjima (Singh, 2010). Igrači mogu biti individue, grupe, organizacije itd. Ovakav vid „igara" jeste sve više prisutan i primenjuje se ne samo u matematici već i u društvenim naukama (ekonomija, pravo, sociologija i dr.), a u poslednje vreme i u informatičkim i računarskim naukama. Ovo teoriji igara daje aspekt multidisciplinarnosti (Kapor, 2017).
Posmatrajući osnovni vid igre, tzv. matričnu igru, tako da ova igra opisuje igru sa nultim zbirom (tj. koliko jedna strana dobija toliko druga strana plaća). U igri učestvuju dva igrača igrač „A" i igrač „B" pri čemu svaki od njih ima konačan broj alternativa/strategija:

- Igrač „A" na raspolaganju ima *m* alternativa;
- Igrač „B" na raspolaganju ima *n* alternativa.

Matrica $A \epsilon Rmxn$ sa elementima a_{ij} naziva se matrica plaćanja. Elementi matrice a_{ij} predstavljaju iznos koji igrač „B" uslovno plaća igraču „A" (Singh, 2010). Kada igra ima sedlastu tačku onda je reč o prostoj matričnoj igri. Međutim, kada igra nema sedlastu tačku onda je nešto teže odrediti rezultat igre. Tada se pristupa korišćenju posebnih metoda za rešavanje matrične igre. Suština je u tome da ne postoji jedinstvena strategija koja će omogućiti igraču „A" maksimalni mogući dobitak odnosno jedinstvena strategija igrača „B", već se radi o kombinaciji strategija.
Rešenje igre je par strategija P^* (za igrača „A") i Q^* (za igrača „B") uz ispunjenje sledeće osobine: ako se jedan igrač pridržava svoje optimalne strategije, tada drugom igraču ne odgovara da odstupi od svoje optimalne strategije (Jovanović, 2016). Tako da je vrednost igre (V) jedaka:

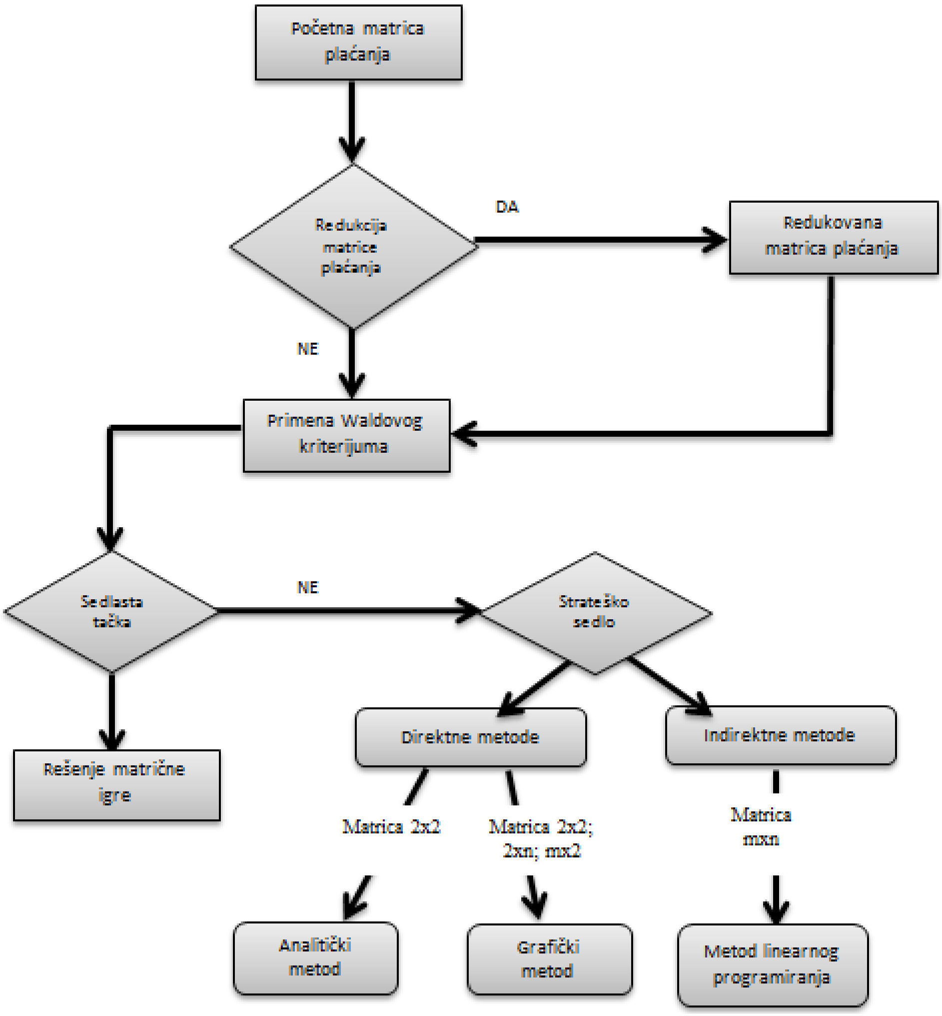
$$V = E\ (P^*, Q^*) \tag{1}$$

Kako su matrične igre razvijene za potrebe vojne svrhe, kao posebna oblast Operacionih istraživanja imaju veliku univerzalnost, te je tako cilj ovog rada da ispita mogućnost primene teorije igara na hipotetičkom primeru poljoprivredne proizvodnje.
Prvi deo rada se bavi teorijskim postavkama mešovitih matričnih igara. Drugi deo rada je posvećen rešavanju i tumačenju hipotetičkog primera.

2. TEORIJSKE POSTAVKE RADA

2.1. Kriterijumi i algoritam rešavanja matričnih igara

Svaka matrica početnog oblika većih dimenzija može biti redukovana tj. svedena sa matrice većih na matricu manjih dimenzija. Ovo svojstvo matričnih igara se naziva redukcija dominacijom.
Dalje, prilikom rešavanja matričnih igara mogu se primeniti brojni kriterijumi. Naime, među tim kriterijumima najznačajniji je Waldov kriterijum. Ovaj kriterijum ima veliku važnost kada je prisutna potpuna neizvesnost u smislu budućih događaja (Pažek & Rozman, 2009). Prema Jovanoviću (2016), ovaj kriterijum sugeriše igračima da zauzmu oprezan stav, što je definisao i sam Wald: „Ako su mi nepoznata stanja prirode, zauzeću najoprezniji stav“ (Jovanović, 2016). Ipak, prema drugim autorima ovaj kriterijum spada u domen pesimističkih kriterijuma iz razloga što sugeriše igraču da očekuje najmanji mogući dobitak tj. da se prilikom razmatranja bazira na onim alternativama koje mu donose najmanji iznos i među njima izabere onu alternativu koja mu donosi najveći mogući dobitak (Pažek & Rozman, 2009). Ipak, ovom gledištu iz ugla igrača „A“ odgovara takozvani *maximin* pristup. Ali, šta je sa igračem „B“? Iz ugla igrača „B“ prisutan je pristup *minmax*. Naime, zauzimajući pesimistički (oprezan) stav, igrač „B“ uslovno gubi i želi da izgubi što manje. Ipak, pre toga razmatra one alternative koje mu donose najveći mogući gubitak (oprezan stav), pa onda među njima bira onu alternativu koja će mu omogućiti najmanji gubitak. Uzimajući u obzir da, prema navedenom kriterijumu, igrači uvek biraju najpovoljnije strategije među najgorim ishodima, ovakve strategije se nazivaju optimalne strategije (Sharma, 2019).
Kao što je već napomenuto, igra može biti u domenu prostih ili u domenu mešovitih matričnih igara. Algoritam koji može biti od pomoći prilikom rešavanja matrične igre dat je na Slici 1 i predstavlja logiku autora ovog rada prilikom rešavanja matričnih igara. Takođe, za potrebe ovog rada koriste se direktne metode rešavanja koje će biti opisane u nastavku.



Slika 1. Algoritam rešavanja matričnih igara

2.2. Direktna primena formula

Pomoću direktnih primena formula moguće je rešiti zadatu matričnu igru. Formule koje se koriste za iznalaženje optimalne strategije igrača „A" tj. *P* (p₁*; p₂*)* su:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (2)$$

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} + a_{21}} \quad \mathbf{(3)}$$

Formule koje se koriste za iznalaženje optimalne strategije igrača „B" tj. Q^* $(q_1^*; q_2^*)$ su:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad \mathbf{(4)}$$

$$q_2 = 1 - q_1 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} + a_{21}} \quad (5)$$

Dok se za vrednost igre V koristi sledeća formula:

$$V = \frac{a_{22} * a_{11} - a_{12} * a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (6)$$

2.3. Grafička metoda

Grafička metoda se takođe može koristiti za rešavanje mešovitih matričnih igara. Prilikom rešavanja matrične igre grafičkom metodom može poslužiti sledeći postupak opisan u nastavku. Cilj je dobiti optimalne strategije igrača „A“ i „B“ kao i vrednost matrične igre. U te svrhe potrebno je formirati sistem nejednačina prema nekom od igrača. Naime, može se samostalno opredeliti od kog igrača će se prvo krenuti, tj. da li će se sistem nejednačina prvo formirati prema igraču „A“ ili „B“ (Milovanović, 2019), samo je potrebno voditi računa o znaku nejednakosti.
Ukoliko se počelo od igrača „A“ onda se moraju naći parametre p_1* i p_2* koji određuju njegovu optimalnu strategiju $P*$. Formirani sistem nejednačina sa znakom ograničenja veće-jednako prevodimo u jednačine i zamenom parametra p_2^* na osnovu teoreme da je zbir svih verovatnoća uvek jednak 1 sledi:

$$p_2* = 1 - p_1* \quad (7)$$

te smo na takav način dobili sistem jednačina (uvođenjem znaka jednako) sa jednom nepoznatom. Onda pristupamo iscrtavanju grafika. Na grafiku zapravo dobijamo prave na osnovu čijeg preseka i koordinata tog preseka dobijamo vrednost igre i potrebne parametre za igrača „A“ (Milovanović, 2019).
Analogno ovom postupku dobijamo i parametre potrebne za igrača „B“ tj. njegov par opimalnih strategija $Q* (q_1*; q_2*)$ vodeći računa o tome da je znak nejednakosti u slučaju sistema nejednačina igrača „B“ manje-jednako.

3. ZAKLJUČAK REZULTATI PRAKTIČNOG HIPOTETIČKOG PRIMERA

Poljoprivredno gazdinstvo „SIMKA“ registrovano je 2020. godine. Vlasnik ove radnje razmišlja o tome šta bi bilo najbolje zasaditi, te to dalje plasirati na tržište (luk, paradajz, krastavac, zelenu salatu ili krompir). Sa područja poljoprivrednog gazdinstva otkupom poljoprivrednih proizvoda bavi se lokalna piljara i jedan veleprodajni centar. Vlasnik poljoprivrednog gazdinstva sastavio je sledeću matricu plaćanja prikazanu u Tabeli 1 u kojoj su date prodajne cene po *kg* za luk, paradajz, krastavac i krompir, tj. po komadu za zelenu salatu.

Tabela 1. Prodajna cena poljoprivrednih proizvoda

		Potencijalni kupac	
		Piljara	Veleprodajni centar
PG „SIMKA"	Luk	25	20
	Paradajz	100	90
	Krastavac	90	95
	Zelena salata	35	30
	Krompir	60	65

Kako bi se pojednostavio dalji postupak obrade podataka pristupa se redukciji. Nakon izvršene redukcije izgled početna matrice plaćanja dat je u Tabeli 2.

Tabela 2. Početna matrica plaćanja nakon redukcije

		Potencijalni kupac	
		Piljara	Veleprodajni centar
PG „SIMKA"	Paradajz	100	90
	Krastavac	90	95

Dalje, pristupa se proveri o veoma značajnom pitanju. Naime, proverava se da li se igra nalazi u domenu prostih ili mešovitih matričnih igara. Ova provera prikazana je u Tabeli 3.

Tabela 3. Provera domena matrične igre

		Potencijalni kupac			
		Piljara	Veleprodajni centar	min j	max i
PG „SIMKA"	Paradajz	100	90	90	
	Krastavac	90	95	90	**90**
	max i	100	95		
	min j	**95**		**90 ≤ *V* ≤ 95**	

Na osnovu Tabele 3 može se zaključiti da se ova igra nalazi u domenu *mešovitih matričnih igara* i da za vrednost igre „*V*" važi izraz $90 \leq v \leq 95$ što znači da se vrednost igre nalazi između vrednosti 90 i 95 n.j.

3.1. Rešavanje postavljenog problema pomoću analitičkog metoda direktnom primenom formula

Pomoću direktnih primena formula moguće je rešiti zadatu matričnu igru. Radi lakšeg uvida u način rada data je Tabela 4.

Tabela 4. Matrica i elementi direktne primene formula

		Potencijalni kupac	
		Piljara **(q1)**	Veleprodajni centar **(q2)**
PG „SIMKA"	Paradajz **(p1)**	100	*90*
	Krastavac **(p2)**	*90*	*95*

Daljom primenom definisanih formula datih u delu 2.2. dobijaju se sledeći rezultati:

$$\mathrm{p1} = \frac{95-90}{100+95-90-90} = 0{,}3333 = \mathbf{33,33\%} \qquad \mathrm{p2} = 1-\mathrm{p1} = \frac{100-90}{100+95-90-90} = 0{,}6667 = \mathbf{66,67\%}$$

$$q1 = \frac{95-90}{100+95-90-90} = 0{,}3333 = \mathbf{33,33\%} \qquad q2 = 1-q1 = \frac{100-90}{100+95-90-90} = 0{,}6667 = \mathbf{66,67\%}$$

$$v = \frac{95*100-90*90}{100+95-90-90} = \mathbf{93,33}\ \boldsymbol{n.j.}$$

3.2. Rešavanje postavljenog problema pomoću grafičke metode

Polazi se od podataka navedenih u Tabeli 4. Formiran sistem nejednačina za PG „SIMKA" dat je formulama:

$$l_1\!: 100 * p_1 + 90 * p_2 \geq V$$
$$l_2\!: 90 * p_1 + 95 * p_2 \geq V$$

Optimalna mešovita strategija PG „SIMKA" dobija se primenom važeće formule:

$$p_1 + p_2 = 1 \tag{8}$$

iz koje sledi:

$$p_2 = 1 - p_1 \tag{9}$$

Zamenom parametra p_2 u formiranom sistemu nejednačina i uvođenjem znaka jednakosti dobijaju se sledeće formule:

$$\underline{l_1}\!:\quad \mathbf{100*p_1+90*(1-p_1) = \mathit{v}}$$
$$\mathbf{100*p_1+90-90*p_1=\mathit{v}}$$
$$\mathbf{10*p_1+90=\mathit{v}}$$
$$\mathbf{p_1=0 \rightarrow \mathit{v}=90}$$
$$\mathbf{p_1=1 \rightarrow \mathit{v}=100}$$

$$\underline{l_2}\!:\quad \mathbf{90*p_1+95*(1-p_1) = \mathit{v}}$$
$$\mathbf{90*p_1+95-95*p_1=\mathit{v}}$$
$$\mathbf{-5*p_1+95=\mathit{v}}$$
$$\mathbf{p_1=0 \rightarrow \mathit{v}=95}$$
$$\mathbf{p_2=01 \rightarrow \mathit{v}=90}$$

Formiran sistem nejednačina za potencijalne kupce PG„SIMKA'' dat je formulama:

$$l_1\!: 100 * q_1 + 90 * q_2 \leq V$$
$$l_2\!: 90 * q_2 + 95 * q_2 \leq V$$

Optimalna mešovita strategija kupaca PG ,,SIMKA” dobija se primenom važeće formule:

$$q_1 + q_2 = 1 \tag{10}$$

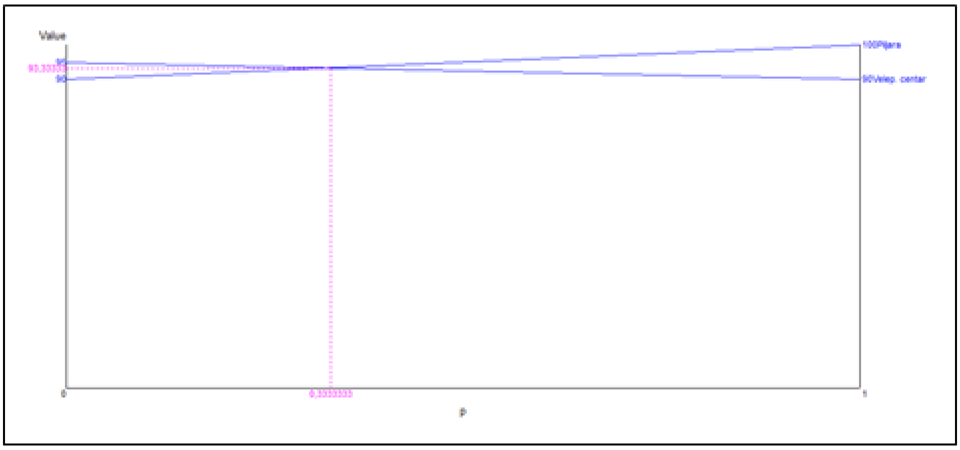
iz koje sledi:

$$q_2 = 1 - q_1 \tag{11}$$

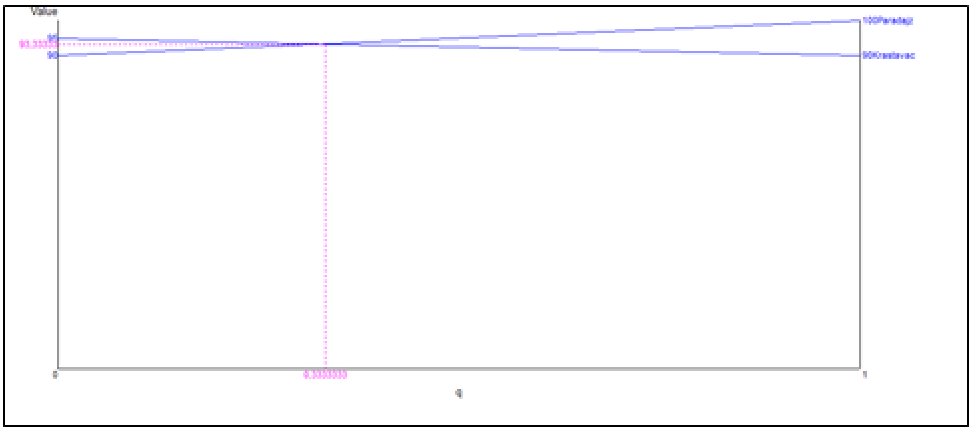
Zamenom parametra q_2 u formiranom sistemu nejednačina i uvođenjem znaka jednakosti dobijaju se sledeće formule:

$\underline{l_1}$: $100*q_1+90*(1-q_1) = v$	**$\underline{l_2}$: $90*q_1+95*(1-q_1) = v$**
$100*q_1+90-90*q_1=v$	**$90*q_1+95-95*q_1=v$**
$10*q_1+90=v$	**$-5q_1*1+95=v$**
$q_1=0 \rightarrow v=90$	**$q_1=0 \rightarrow v=95$**
$q_1=1 \rightarrow v=100$	**$q_2=01 \rightarrow v=90$**

Na Slici 2 i Slici 3 data su grafička rešenja zadatog problema.



Slika 2. Rezultati grafičke metode za PG ,,SIMKA“



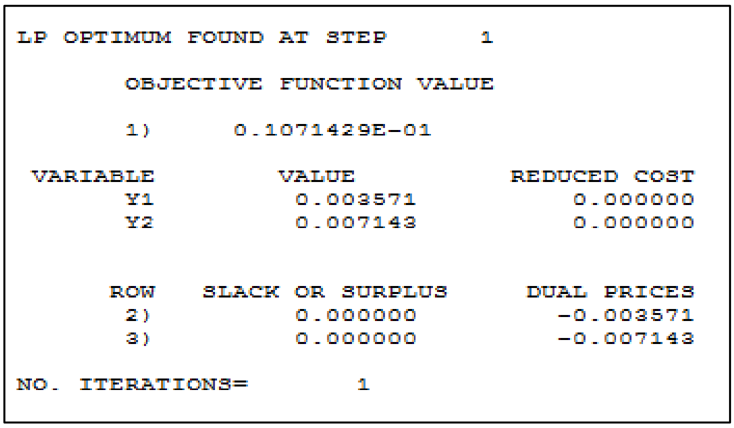
Slika 3. Rezultati grafičke metode za kupce PG ,,SIMKA“

3.3. Rešavanje postavljenog problema pomoću softvera LINDO 6.1

Radi provere tačnosti dobijenih rezultata korišćen je softver LINDO V 6.1. LINDO sintaksa za PG „SIMKA” data je na sledeći način:

```
!Ovo je funkcija cilja
min y1+y2
ST
!Ovo su ograničenja
100y1+90y2>=1
90y1+95y2>=1
END
```

Izgled dobijenog rešenja dat je na Slici 4.



```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      0.1071429E-01

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       Y1         0.003571          0.000000
       Y2         0.007143          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000         -0.003571
       3)         0.000000         -0.007143

NO. ITERATIONS=       1
```

Slika 4. Izgled rešenja u programu LINDO 6.1 za PG „SIMKA“

Tumačeći rezultate dolazi se do sledećeg zaključka:

z_0=0,01071429 $\rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{1}{z0} = \frac{1}{0{,}01071429} = \mathbf{93.33}$
y_1=0,003571 $\rightarrow \boldsymbol{p1} = y1 * v = 0{,}003571 * 93{,}33 = 0{,}3333 = \mathbf{33.33}\%$
y_2=0,007143 $\rightarrow \boldsymbol{p2} = y2 * v = 0{,}007143 * 93{,}33 = 0{,}6667 = \mathbf{66.67}\%$

Vrednost igre V iznosi 93.33 n.j. a optimalna strategija PG „SIMKA” je P*(33.33% i 66.67%)

LINDO sintaksa za kupce PG „SIMKA” u LINDO 6.1 programu data je na sledeći način:

```
!Ovo je funkcija cilja
max x1+x2
ST
!Ovo su ograničenja
100x1+90x2<=1
90x1+95x2<=1
END
```

Izgled dobijenog rešenja dat je na Slici 5.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        2

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      0.1071429E-01

 VARIABLE          VALUE           REDUCED COST
       X1        0.003571            0.000000
       X2        0.007143            0.000000


      ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
       2)        0.000000            0.003571
       3)        0.000000            0.007143

NO. ITERATIONS=        2
```

Slika 5. Izgled rešenja u programu LINDO 6.1 za kupce PG ,,SIMKA"

Tumačeći rezultate dolazi se do sledećeg zaključka:

g_0=0,01071429 → $\boldsymbol{v} = \frac{1}{g0} = \frac{1}{0{,}01071429} = \mathbf{93.33}$
x_1=0,003571 → $\boldsymbol{q1} = x1 * v = 0{,}003571 * 93{,}33 = 0{,}3333 = \mathbf{33.33}\%$
x_2=0,007143 → $\boldsymbol{q2} = x2 * v = 0{,}007143 * 93{,}33 = 0{,}6667 = \mathbf{66.67}\%$

Vrednost igre V iznosi 93.33 n.j. a optimalna strategija kupaca PG ,,SIMKA" je Q*(33.33% i 66.67%).

4. DISKUSIJA REZULTATA

Uzimajući u obzir rezultate primenjenih metoda (direktna primena formula, grafička metoda i rešenje softvera LIDNO 6.1) dolazi se do zaključka da je rešenje svake primenjene metode identično. Naime, osnovni outpiti ili rešenja matrične igre su:

- $P*$ - optimalna mešovita strategija igrača A (u razmatranom primeru to je PG ,,SIMKA");
- $Q*$ - optimalna mešovita strategija igrača B (u razmatranom primeru to su kupci proizoda PG ,,SIMKA" - lokalna piljara i veleprodajni centar);
- V - vrednost igre.

U posmatranom primeru optimalna mešovita strategija PG ,,SIMKA" je $P*$ (33.33% i 66.67%) što znači da postoji verovatnoća od 33.33% da će ovo PG proizvoditi i prodavati paradajz i verovatnoća od 66.67% da će proizvoditi i prodavati krastavac. Sa druge strane optimalna mešovita strategija kupaca je $Q*$ (33.33% i 66.67%) što znači da postoji verovatnoća od 33.33% da će piljara kupiti proizvode PG ,,SIMKA" i verovatnoća od 66.67% da će veleprodajni centar kupiti proizvode PG ,,SIMKA". Primenom Waldovog kriterijuma za vrednost igre V važila je relacija $90 \leq V \leq 95$ pri čemu se dobijeno rešenje primenom direktnih metoda sa svojom vrednošću 93.33 nalazi u zadatom opsegu. Do istog rešenja, međutim znatno bržim i lakšim putem, dolazi se i primenom softvera LINDO 6.1.

5. ZAKLJUČAK

Prikazani model i rezultati ukazuju da je moguće primeniti razmatrani model mešovitih matričnih igara u domenu poljoprivredne proizvodnje i prodaje proizvoda. Naime, ovakav model odgovara modelu matričnih igara iz razloga što imamo dva suprotstavljena interesa:

sa jedne strane farmera koji želi da proda svoje proizvode po što višoj ceni, i sa druge strane kupce koji žele da kupe proizvod po što nižoj ceni. Takođe, model logički odgovara metodi mešovitih matričnih igara jer se poljoprivredni proizvođači pre odlučuju na proizvodnju više različitih kultura nego za proizvodnju samo jedne kulture.
Međutim, treba pretpostaviti da razmatranom modelu prethodi uslov dobrih vremenskih prilika što će usloviti rod poljoprivrednih proizvoda. U ovome se krije još jedna igra, naime igra čoveka protiv prirode, kao poseban vid ili tip teorije igara. Autor Walker i njegovi saradnici razvili su model matrične igre čoveka protiv prirode. Preciznije, potrebno je proširiti problematiku prvo na posmatranje igre čoveka protiv prirode pa na rezultatima te igre bazirati dalju igru u smislu suprotstavljenih interesa u smislu cena između proizvođača kao prodavca i kupaca poljoprivrednih proizvoda.
Primena matričnih igara u poljoprivredi mora biti bazirana na nekoliko faza u smislu prethodnog sagledavanja mogućnosti da se neki proizvod proizvede i naredne faze plasiranja proizvedenih proizvoda.
Ovo navodi težnju da naredna istraživanja na ovu temu trebaju biti usmerena na povezivanje igara protiv prirode i mešovitih matričnih igara u smislu prodaje proizvoda kupcima. Zato je potrebno da se razvije celokupan model matričnih igara na polju poljoprivredne proizvodnje, što bi u velikoj meri pomoglo poljoprivrednim proizvođačima u Srbiji kao zemlji koja obiluje poljoprivrednim potencijalom.

APPLICATION OF DIRECT METHODS OF MIXED MATRIX GAMES ON THE EXAMPLE OF AGRICULTURAL PRODUCTION

Aleksandra Radić
University of Belgrade, Technical faculty in Bor, Engineering Management Department
Bor, Serbia

Abstract

The modern tendency of science is the development of such methods, tools and procedures that will be able to be applied in numerous branches of science. This paper was created with the aim of trying to simplify the decision-making and adjustment process in the primary sectors of the economy, more precisely in agriculture, through the application of special, direct methods of mixed matrix games. For these purposes, a hypothetical example of an agricultural farm and its customers was used. The results, based on the application of Wald's criterion, speak in favor of the possibility of applying mixed matrix games in agricultural production and the practicality of the model because the application of all methods used in the work obtained the same end result.

Keywords: *Mixed matrix games, Agriculture, Direct methods, Wald's criterion*

LITERATURA / REFERENCES

Jovanović, I. (2016). Operaciona istraživanja II - teorija igara, Autorizovana predavanja, Tehnički fakultet u Boru, Bor.

Kapor, P. (2017). Teorija igara: sistemski pristup i razvoj, Megatrend revija, 14(1), 253-282.

Milovanović, A. (2019). Primena direktnih metoda za rešavanje mešovitih matričnih igara, Engineering management, 5(2), 101-111.

Pažek, K., Rozman, Č. (2009). Decision making under conditions of uncertainty in agriculture: a case study of oil crops, ISSN 1330-7142.

Sharma, A. (2019). An Analytic Study of Matrix Games. International Research Journal of Management Science & Technology, 10, 80-89

Singh, A.P. (2010). Optimal Solution Strategy for Games. International Journal on Computer Science and Engineering, 2(9), 2778-2782.

Walker, O.L., Heady, E.O., Tweeten L.G., Pesek, J.T. (1960). Application of Game Theory Models to Decisions on Farm Practices and Resource Use. Dostupno na: https://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?filename=41&article=1033&context=ag_researchbulletins&type=additional,pristupljeno:13.05.2020.