

PRIMENA TEORIJE REDOVA ZA PROJEKTOVANJE SKLADIŠNIH SISTEMA

Milan Stojanović

Departman za Industrijsko inženjerstvo, Mašinski Fakultet, Univerziteta u Beogradu,
Beograd, Srbija

Izvod

U radu se prikazuje primena teorije redova za razvoj i projektovanje sistema opsluživanja koja je osnova za funkcionisanje skladišnih sistema za skladištenje materijala u cilju njihovog čuvanja i distribucije. U ovom slučaju skladišni sistem se posmatra kao otvoreni sistem, u kome je definisan model po kome su izračunate karakteristike dvofaznog sistema opsluživanja u dopremi i dvofaznog sistema opsluživanja u otpremi. Za izračunavanje vrednosti karakteristika sistema opsluživanja, korišćen je program QTSPflux.xls. Određen je broj istovarnih i utovarnih rampi sa parametrima njihove tehnološke funkcije, kao i parametri tehnološke funkcije bočnog paletnog viljuškara u funkciji dopreme i otpreme.

Ključne reči: teorija redova, opsluživanje, projektovanje, skladišni sistemi

1. UVOD

Projektovanje industrijskih objekata predstavlja složeni proces u kome se rešavaju mnoga različita pitanja tehničko-tehnološkog, organizacionog i ekonomskog karaktera. Projektovanje je ujedno prva i osnovna etapa investicione izgradnje kojom se obezbeđuje izgradnja i rekonstrukcija postojećih objekata (Zrnić, 2016).

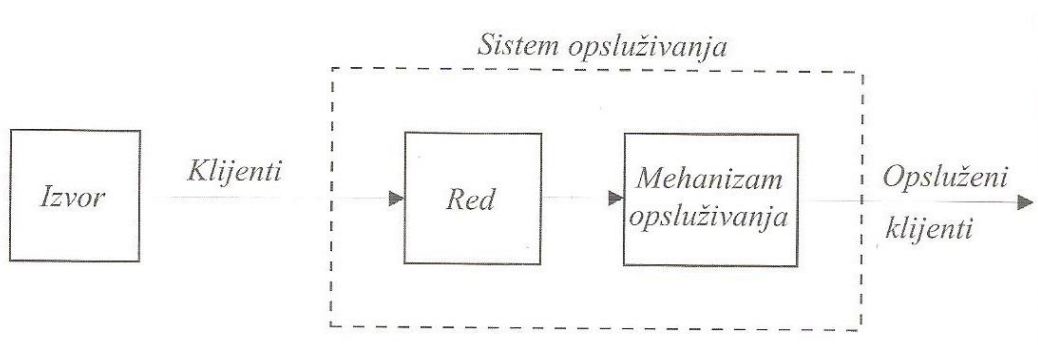
U slučaju projektovanja skladišnog sistema podrazumevaju se dva aspekta: funkcionalni i fizički. U funkcionalnom smislu, skladište se objašnjava kao plansko-svesno odlaganje, s ciljem da se privremeno sačuvaju materijali i gotovi proizvodi u intralogistici radi korišćenja u bliskoj budućnosti (Zhong et al., 2021). U fizičkom smislu skladišni sistem je tehnološka celina sa svojim elementima i strukturom organizovana na određenoj površini, odnosno određenom prostoru (Geest et al., 2020).

U realnim uslovima postoji čitav niz razloga koji uslovljavaju formiranje i održavanje sistema za čuvanje, odnosno uskladištenje. Ti razlozi mogli bi da se sistematizuju na sledeći način (Gligorijević, 1955):

- Vremesko izjednačavanje, neophodno je gde nije moguća sinhronizacija prijema i otpreme u višefaznom transportnom procesu, kao i u uslovima vremenske neusaglašenosti završetka proizvodnje i zahteva tržišta u smislu promena strukture između ulaznih i izlaznih tokova (Emide et al., 2021);
- Izjednačavanje količina, neophodna je funkcija u dva slučaja: u proizvodnim procesima gde se primenjuje serijska ili masovna proizvodnja iz koje izlazi veća količina od trenutnih potreba i tamo gde je potrebno prilagođavanje različitim kapacitetima transportnih sredstava jednog ili više vidova transporta;
- Čuvanje zaliha, ima za cilj da obezbedi kontinuitet proizvodnje koji može da bude ugrožen pojavom određenih smetnji. U realnim uslovima bez zaliha često ne bi bilo moguće adekvatno iskorišćenje proizvodnih kapaciteta;

- Optimizacija nabavke, podrazumeva definisanje adekvatne količine pri kupovini koja obezbeđuje dobijanje povoljnog rabata, ali i snižavanje troškova dostave;
- Oplemenjivanje materijala i proizvoda realizuje se u specijalnim skladištima u kojima se čuva radi zrenja i slično;
- Nabavka i čuvanje materijala u tržišnoj ekonomiji često se realizuje i iz špekulativnih razloga.

Kada klijent dolazi u neki višefazni sistem, staje u red i čeka na opsluživanje u prvoj fazi. Nakon toga, kada klijent bude opslužen, napušta prvu fazu i postaje klijent koji dolazi u drugu fazu opsluživanja. Klijent napušta sistem opsluživanja onda, kada bude završeno opsluživanje u poslednjoj fazi (Smith, 2018). Proces opsluživanja, pretpostavljen u najvećem broju modela teorije redova prikazan je na Slici 1.



Slika 1. Šematski prikaz procesa opsluživanja (Bugarić i Petrović, 2011)

2. STRUKTURA MODELA TEORIJE REDOVA

Statistički model po kome se klijenti generišu (na kojima funkcioniše sistem skladišta) od strane izvora u vremenu takođe mora biti definisan. Uopšteno, dolazni tok se određuje preko raspodele verovatnoća vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja $A(t)$ (Smith, 2018):

$$A(t) = P [\text{vreme između dva uzastopna dolaska} \leq t] \quad (1)$$

Uobičajena pretpostavka u najvećem broju modela teorije redova je da su vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja nezavisne i istovetno raspodeljene slučajne promenljive.

Vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja naziva se i *vreme dolaska*. Raspodela vremena između dva uzastopna dolaska klijenata u sistem opsluživanja, koja se najčešće koristi u praksi je eksponencijalna raspodela (Emide, 2021):

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (2)$$

gde je: λ – srednji intenzitet dolaska klijenata u sistem.

Mehanizam opsluživanja se sastoji od jedne ili više faza opsluživanja, u kojima se nalazi jedan ili više paralelnih kanala za opsluživanje (Tan et al., 2021). Svaki model teorije redova mora da definiše međusobni raspored faza opsluživanja kao i broj kanala za opsluživanje u svakoj od faza (Emde et al., 2021). Vreme koje protekne od početka do završetka opsluživanja klijenta naziva se vreme opsluživanja i ono je definisano preko raspodele verovatnoće vremena opsluživanja, $B(t)$ (Delhami et al.,):

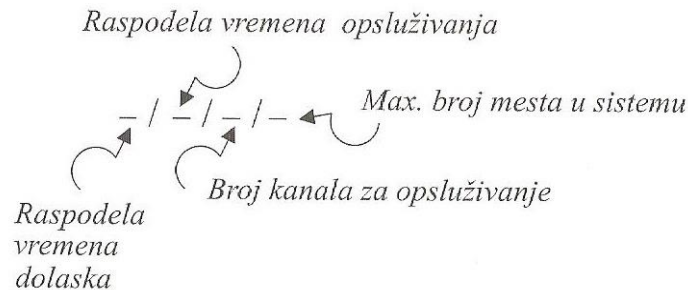
$$B(t) = P [\text{vreme opsluživanja} \leq t]. \quad (3)$$

U opštem slučaju vremena opsluživanja klijenata međusobno su nezavisna i raspodeljena po istoj teorijskoj raspodeli, a raspodela vremena opsluživanja koja se najčešće koristi u praksi je eksponencijalna raspodela (Banu et al., 2021):

$$f(x) = \mu \cdot e^{-\mu t} \quad (4)$$

gde je: μ - srednji intenzitet opsluživanja

Saglasno Kendalovoj notaciji opsluživanja M/M/c/∞, za opis modela sistema masovnog opsluživanja, koristi se forma koja je šematski prikazana na Slici 2. (Bugarić i Petrović, 2011).



Slika 2. Kendall-ovo označavanje sistema masovnog opsluživanja (Bugarić i Petrović, 2011)

2.1. Karakteristike sistema opsluživanja

Kod studiranja fenomena čekanja u stohastičkim procesima, analize mogu da se vrše za procese koji zavise od vremena, ili mnogo jednostavnije, za procese sa stacionarnim stanjem, usvajajući njegovo postojanje. Neposredno po početku rada sistema opsluživanja, na stanje sistema (broj klijenata u sistemu) veoma utiče početno stanje sistema opsluživanja tj. broj klijenata u sistemu na početku rada sistema opsluživanja. Vremenom taj uticaj opada dok potpuno ne nestane. Taj period rada sistema opsluživanja naziva se period nestacionarnog režima rada. Posle dovoljno dugog perioda vremena, stanje sistema postaje praktično nezavisno od početnog stanja kao i od proteklog vremena. U tom slučaju sistem opsluživanja je dostigao stacionarni režim rada, koji se ogleda kroz činjenicu da raspodela verovatnoća stanja sistema ne zavisi od vremena, tj. verovatnoće stanja sistema imaju konstantne vrednosti. Parametri tehnološke funkcije – karakteristike sistema opsluživanja, koji se najčešće koriste za opisivanje rada sistema opsluživanja, u stacionarnom režimu su sledeći (Bugarić i Petrović, 2011):

- P_n – verovatnoća da je tačno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja;
- P_{sk} – verovatnoća da je kanal za opsluživanje slobodan;
- P_{to} – verovatnoća trenutnog opsluživanja;
- P_{ops} – verovatnoća opsluživanja;
- P_{pr} – verovatnoća postojanja reda;
- c_z – srednji broj zauzetih kanala za opsluživanje;
- c_z/c – srednji koeficijent zauzetosti kanala za opsluživanje;
- N_{ops} – srednji broj klijenata (jedinica) koji se opslužuju;
- $N_{ws}(L)$ – srednji broj klijenata (jedinica) u sistemu;
- $N_w(L_q)$ – srednji broj klijenata (jedinica) u redu;
- $t_{ws}(W)$ – srednje vreme koje klijent (jedinica) provede u sistemu opsluživanja;
- $t_w(W_q)$ – srednje vreme koje klijent (jedinica) provede u redu.

Ukoliko se ne naglasi drugačije, pri analizi i radu sa sistemima opsluživanja koristi se sledeće standardno označavanje i terminologija:

- Stanje sistema – definiše se preko broja klijenata u sistemu opsluživanja.
- Dužina reda – broj klijenata koji čekaju na početak opsluživanja tj. stanje sistema umanjeno za broj klijenata koji se trenutno opslužuju.
- $N_{ws}(t) \{L(t)\}$ - broj klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t .
- $p_n(t)$ – verovatnoća da je tačno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja u vremenskom trenutku t .
- c – broj kanala za opsluživanje u sistemu opsluživanja.
- λ_n – srednji intenzitet dolaska klijenata (jedinica) u sistem ako je trenutno n klijenata (jedinica) u sistemu.
- μ_n – srednji intenzitet opsluživanja sistema ako je trenutno n klijenata (jedinica) u sistemu opsluživanja.

Ako je λ_n konstantno za sve n , tada se ta konstanta obeležava sa λ . Analogno, kada je srednji intenzitet opsluživanja μ_n , za sve zauzete kanale opsluživanja, konstantan za sve $n \geq 1$, tada se ta konstanta obeležava sa μ (u ovom slučaju $\mu_n = c \cdot \mu$ za $n \geq c$, tj. kad su svih c kanala zauzeti). U skladu sa napred iznetim $1/\lambda$ i $1/\mu$ predstavljaju srednje vreme između dolaska dva uzastopna klijenta i srednje vreme opsluživanja, respektivno. Takođe, $\rho = \lambda/(c \cdot \mu)$ (5) predstavlja koeficijent iskorišćenja kanala za opsluživanje tj. očekivani deo vremena koje svaki kanal za opsluživanje, u datom modulu (fazi) opsluživanja zauzet (Delhami et al., 2020).

Verovatnoća stanja sistema P_0 višekanalnog sistema opsluživanja sa beskonačnim redom određuje se nalaženjem granične vrednosti kada broj mesta u redu m teži beskonačnosti u izrazu:

$$P_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^c \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + \frac{(c \cdot \rho)^c}{c!} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho}} \quad (6)$$

Verovatnoća opsluživanja izračunava se kao:

$$P_{ops} = \lim_{m \rightarrow \infty} 1 - \rho^m \cdot P_c = 1 \quad (7)$$

Srednji broj zauzetih kanala:

$$c_z = \lim_{m \rightarrow \infty} P_0 \cdot \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} \cdot P_c = \sum_{k=0}^c k \cdot \frac{(c \cdot \rho)^k}{k!} + c \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \cdot P_c \quad (8)$$

Srednji koeficijent zauzetosti kanala za opsluživanje jednak je količniku srednjeg broja zauzetosti kanala za opsluživanje i broja kanala za opsluživanje:

$$\frac{c_z}{c} \quad (9)$$

Verovatnoća postojanja reda izračunava se kao:

$$P_{pr} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_c \cdot \rho \cdot \frac{1 - \rho^m}{1 - \rho} = P_c \cdot \rho \cdot \frac{1}{1 - \rho} \quad (10)$$

Srednji broj klijenata u redu izračunava se kao:

$$L_q = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho * Pc * \frac{1 - \rho^{m+1} [m * (1 - \rho) + 1]}{(1 - \rho)^2} = Pc * \frac{\rho}{(1 - \rho)^2} \quad (11)$$

Srednji broj klijenata u sistemu izračunava se kao zbir srednjeg broja zauzetosti kanala za opsluživanje i srednjeg broja klijenata u redu:

$$L = c_z + L_q \quad (12)$$

Srednje vreme koje klijent provede u redu jednako je količniku srednjeg broja klijenata u redu i intenziteta dolaska klijenata u sistem λ :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (13)$$

Srednje vreme klijent provede u sistemu jednako je količniku srednjeg broja klijenata u sistemu i intenziteta dolaska klijenata u sistem λ :

$$W = \frac{L}{\lambda} \quad (14)$$

3. STUDIJA SLUČAJA PROJEKTOVANJA SKLADIŠTNOG SISTEMA

Sistemi opsluživanja sa neograničenim izvorom jedinica su najrasprostranjeniji sistemi opsluživanja. Iz tog razloga, projektovani skladišni sistem se posmatra kao otvoreni sistem. Model po kome su izračunate karakteristike sistema opsluživanja (parametri tehnološke funkcije) označava se Kendalovom oznakom M/M/c/∞.

Izvršeno je projektovanje skladišnog sistema sa sledećim karakteristiukama: površina skladišnog sistema iznosi 1800 m² a maksimalna visina regala ne sme biti veća od 12m. Skladišni kapacitet regalnog skladišta čine 16 uniformnih regala koji mogu da uskladište 3456 paleta dimenzija 800x1200mm. Skladišni sistem se sastoji iz dvofaznog sistema opsluživanja u dopremi i dvofaznog sistema opsluživanja u otpremi. Za izračunavanje vrednosti karakteristika sistema opsluživanja, korišćen je program QTSPlus.xls.

3.1. Određivanje broja istovarnih rampi

Ova faza predstavlja prvu fazu sistema opsluživanja, gde rampe predstavljaju kanale za opsluživanje, a kamioni predstavljaju klijente koji zahtevaju opsluživanje. Da bi se odredio potreban broj istovarnih rampi potrebno je da budu poznati srednji intenziteti dolazaka (λ) i opsluživanja (μ) kamiona u sistem.

Na osnovu prosečnog vremena između dolazaka kamiona u sistem:

$$\bar{td} = \frac{t_{ef}}{\text{broj kamiona u dopremi}} = \frac{450}{5} = 90 \quad (15)$$

gde je: t_{ef} - efektivno trajanje radnog vremena u toku smene.

Određuje se srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem i on je jednak (jedan u minuti):

$$\lambda = \frac{1}{\bar{td}} = \frac{1}{90} = 0.011 \quad (16)$$

Srednji intenzitet opsluživanja kamiona jednak je recipročnoj vrednosti ciklusa ručnih paletnih kolica (jedan u minuti):

$$\mu = \frac{1}{T_{is}} = 0.022 \quad (17)$$

gde je: T_{is} – 44.26 minuta (vreme za koje radnik ručnim paletnim kolicima istovari 22 palete iz šlepera u prijemnu zonu).

Potreban broj istovarnih rampi određuje se kao:

$$\rho = \frac{\lambda}{c \cdot \mu} = \frac{0.011}{1 \cdot 0.022} = 0.5 \quad (18)$$

gde je: ρ – koeficijent iskorišćenja istovarne rampe, 1 – broj istovarnih rampi. Rezultati parametara tehnološke funkcije za jednu istovarnu rampu su prikazani u Tabeli 1.

Tabela 1. Parametri tehnološke funkcije za jednu istovarnu rampu

Parametri tehnološke funkcije za 1 utovarnu rampu	
λ	0.024
μ	0.047
ρ	0.51
L	1.04
Lq	0.53
W	43.45
Wq	22.18
Cz	0.49
Cz/c	0.49
$P0$	0.51
$P1$	0.24

3.2. Parametri tehnološke funkcije bočnog paletnog viljuškara u dopremi

Na osnovu prosečnog vremena između dolazaka paleta:

$$\bar{td} = \frac{t_{ef}}{\text{ukupan broj paleta u dopremi}} = \frac{450}{110} = 4.09 \quad (19)$$

gde je: t_{ef} - efektivno trajanje radnog vremena u toku smene. Određuje se srednji intenzitet dolaska paleta i on je jednak:

$$\lambda = \frac{1}{4.09} = 0.24 \quad (20)$$

Srednji intenzitet opsluživanja bočnim paletnim viljuškarem se izračunava kao recipročna vrednost ciklusa bočnog paletnog viljuškara i definisana je izrazom:

$$\mu = \frac{1}{Tc} = \frac{1}{1.67} = 0.59 \quad (21)$$

Unošenjem poznatih vrednosti λ , μ , i $c = 1$, u navedeni program, dobijene su vrednosti parametara tehnološke funkcije koji su prikazani u Tabeli 2.

Tabela 2. Parametri tehnološke funkcije bočnog paletnog viljuškara u dopremi

Parametri	λ	M	ρ	L	L_q	W	W_q
Dobijene vrednosti	0.24	0.59	0.4	0.66	0.26	2.78	1.11

3.3. Parametri tehnološke funkcije bočnog paletnog viljuškara u otpremi

Srednji intenzitet opsluživanja bočnim paletnim viljuškarem se izračunava izrazom:

$$\mu = \frac{1}{Tc} = \frac{1}{1.65} = 0.6 \quad (22)$$

Srednji intenzitet dolaska paleta λ je isti, jer je broj paleta koji se dnevno doprema i otprema isti.

Za $c = 1$ i poznate vrednosti λ i μ , dobijene su vrednosti parametara tehnološke funkcije koje su prikazane u Tabeli 3.

Tabela 3. Tehnološki parametri bočnog paletnog viljuškara u otpremi

Parametri	λ	μ	ρ	L	L_q	W	W_q
Dobijene vrednosti	0.24	0.6	0.39	0.65	0.25	2.73	1.08

3.4. Određivanje broja utovarnih rampi

Srednji intenzitet opsluživanja ručnim paletnim kolicima viljuškarem se izračunava izrazom:

$$\mu = \frac{1}{tops} = \frac{1}{21.23} = 0.047 \quad (23)$$

Na osnovu prosečnog vremena između dolazaka kamiona u sistem:

$$\bar{td} = \frac{tef}{broj kamiona u otpremi} = \frac{450}{11} = 40.9 \text{ min} \quad (24)$$

gde je: t_{ef} - efektivno trajanje radnog vremena u toku smene.

Određuje se srednji intenzitet dolaska kamiona u sistem i on je jednak:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{td}} = \frac{1}{40.9} = 0.024 \quad (25)$$

Za $c = 1$ i poznate vrednosti λ i μ , dobijene su vrednosti parametara tehnološke funkcije koje su prikazane u Tabeli 4.

Tabela 4. Parametri tehnološke funkcije za jednu utovarnu rampu

Parametri tehnološke funkcije za 1 utovarnu rampu	
λ	0.024
μ	0.047
ρ	0.51
L	1.04
Lq	0.53
W	43.45
Wq	22.18
Cz	0.49
Cz/c	0.49
$P0$	0.51
$P1$	0.24

4. ZAKLJUČAK

Kada je u pitanju projektovanje skladišnog sistema, parametri koji su od velike važnosti su L (srednji broj jedinica u sistemu), L_q (srednji broj klijenata u redu), W (srednje vreme koje jedinica provede u sistemu), W_q (srednje vreme koje jedinica provede u redu).

Na osnovu parametra W , može se približno odrediti vreme koje je potrebno da se jedna paleta iz prijemne zone uskladišti u module regala. Vreme uskladištenja približno iznosi $90.89/22+1.51+1.86=7.5$ minuta (90.89 – minuta koje šleper provede u sistemu (Tabela 1), 22 – broj paleta u šleperu, 2.78 – minuta je potrebno da bočni paletni viljuškar iz prijemne zone transportuje palete u regale (Tabela 2). Dobijeno vreme uskladištenja jedne palete je približno izračunato, zbog pretpostavke da se paleta odmah prihvata na opsluživanje u svakoj fazi.

Na osnovu parametra L , zaključuje se da se u sistemu uvek nalazi jedna paleta.

Dobijeni rezultati jasno ukazuju da je teorija redova pouzdan alat koji daje informacije o ponašanju sistema opsluživanja. Ova teorija obezbeđuje deo informacija potreban za upravljanje analizama Operacionih istaživanja u pokušajima da se pronade najbolja konfiguracija sistema opsluživanja.

APPLICATION OF QUEUEING THEORY FOR THE DEVELOPMENT OF THE WAREHOUSE SYSTEMS

Milan Stojanović

Department of Industrial engineering, Mechanical faculty, University in Belgrade, Belgrade , Serbia

Abstract

The paper presents the application of queueing theory for the development and design of service systems, which is the basis for the functioning of warehouse systems for storage of materials in order to store and distribute them. In this case, the warehouse system is considered as an open system, in which a model is defined according to which the characteristics of a two-phase delivery service system and a two-phase delivery service system are calculated. The QTSPlux.xls program was used to calculate the values of the service system characteristics. The number of unloading and loading ramps with the parameters of their technological function, as well as the parameters of the technological function of the driver seated reach truck in the function of delivery and dispatch were determined.

Keywords: *Queueing theory, Service, Design, Warehouse systems*

LITERATURA / REFERENCES

- Bugarić, U., Petrović, D. (2011). Modeliranje sistema opsluživanja, Mašinski fakultet Beograd, Beograd.
- Banum, Y., Akrupan, A. (2021). An open queueing network-based tool for performance estimation in a shuttle-based storage and retrieval system. *Applied Mathematical Modeling*, 80, 1678-1695.
- Dehami, S., Smith, J.S., Gue, K.R. (2020). A simulation – based optimization approach to design optimal layouts for block stacking warehouses. *International Journal of Production Economics*, 223, 107525.
- Emde, S., Tahirov, N., Gendrea, M., Glocky, C.H. (2020). Routing automated lone-guided transport vehicles in a warehouse handling returns. *European Journal of Operational Research*, 292, 1085-1098.
- Gees, M.V., Bedir, T., Catal., C. (2020). Desing of a reference architecture for development smart warehouses in industry 4.0. *Computer in Industry*, 124, 103343.
- Georgijević, M. (1955). Regalna skladišta, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka.
- Smith, W.L. (2018). Introduction to queueing networks. Theory and practice, Springer.
- Zrnjić, Đ. (2016). Fabrička postrojenja i tehnička logistika, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd.
- Vukićević, S. (1995). Skladišta, Saobraćajni fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd.