Engineering management 10 (1) (2024) 73-82

Engineering management

ANALIZA I PRAKTIČNA IMPLEMENTACIJA DIREKTNIH METODA MEŠOVITIH MATRIČNIH IGARA

Ognjen Milosavljević
Univerzitet u Beogradu, Tehnički fakultet u Boru, Odsek za inženjerski menadžment
Bor, Srbija

Izvod

U ovom radu prikazana je primena direktnih metoda za rešavanje problema mešovitih matričnih igara na kroz primer samostalne zanatsko trgovinske radnje. Optimalne strategije igrača u igri i vrednost igre dobijene su putem analitičkog i grafičkog metoda, dok je kao potvrda validnosti rezultata korišćen softverski paket Lindo v.6.1. Rešavanjem problema zaključeno je da su optimalne strategije igrača P*=(14,29 %, 85,71 %) i Q*=(28,57 %, 71,43 %), a vrednost igre je V=15,71 (izraženo u hiljadama RSD). Vrednost igre predstavlja najvišu prodajnu cenu i istovremeno najmanju kupovnu cenu proizvoda iz odabranog asortimana. Primenom ovih metoda mogu se unaprediti performanse preduzeća u smislu fokusiranja na određenu vrstu traženog proizvoda.

Keywords: *teorija igara, mešovite matrične igre, analitički metod, grafički metod, Lindo*

1. UVOD

Teorija igara počinje sa radom Johna von Neumanna tokom 1920-ih, što je kulminiralo njegovom knjigom sa Oskarom Morgensternom. Proučavali su “nula-sum” igre u kojima su interesi dva igrača strogo suprotstavljeni. John Nash je obradio opštiji i realističniji slučaj mešavine zajedničkih interesa i rivalstva i bilo kog broja igrača. Drugi teoretičari, kao npr. Reinhard Selten i John Harsanyi koji su sa Nashom delili Nobelovu nagradu za ekonomiju 1994. godine, proučavali su još kompleksnije igre u kojima jedan igrač ima više informacija od drugih iz prakse iz domena mešovitih igara (Dixit, 2024).

Brojni su primeri u Teoriji igara, kako teoretski, tako i u praksi, od najbanalnijih do velikih problema i dilema. Postavlja se pitanje kako ih rešiti. Najopštiji primer jesu prodavci i kupci. Prodavcima je u interesu da što više prodaju i po što višoj ceni, a kupcima da plate što manje, po mogućstvu i sa odloženim rokom plaćanja. Ono što se upravo želi postići je najbolje moguće rešenje za sve aktere što nekada nije ni malo lako.

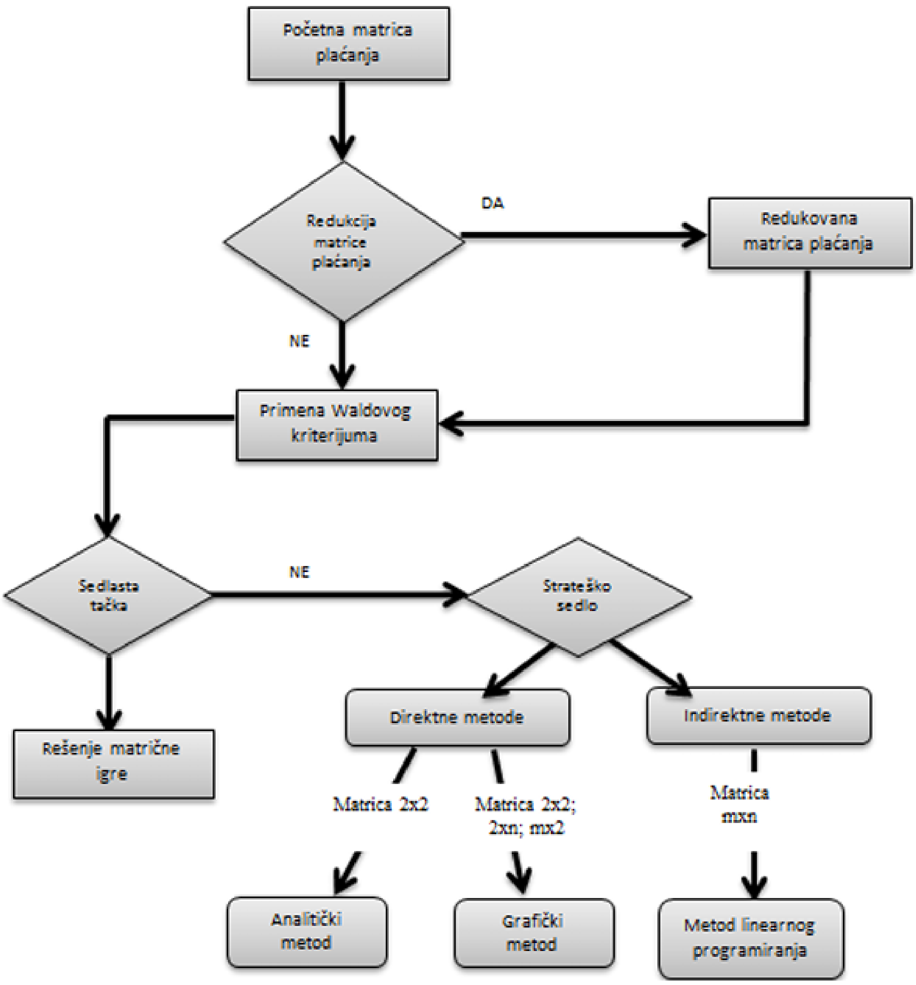
Teorija igara je matematička teorija procesa donošenja odluka igrača (učesnika, protivnika) koji su u sukobu (konfliktu) ili su uključeni u konfliktne uslove (Jovanović, 2016). Pomoću teorije igara neophodno je analiziranje i rešavanje konfliktne situacije. Pri rešavanju mešovitih matričnih igara potrebno je odrediti optimalne strategije za svakog igrača (Jovanović, 2016). Ukoliko se odmah može pronaći jedna optimalna strategija za oba igrača, onda se radi o prostim matričnim igrama. Međutim, ukoliko svaki od igrača ima drugačiju optimalnu strategiju, reč je o mešovitim matričnim igrama. Rešenje mešovitih matričnih igara se dobija nakon uvođenja elemenata slučajnosti prilikom izbora pojedinačnih strategija, a svakoj strategiji se dodeljuje određena verovatnoća (Jovanović**,** 2016). Suština je u tome da ne postoji jedinstvena strategija koja će omogućiti igraču „A“ maksimalni mogući dobitak odnosno jedinstvena strategija igrača „B“, već se radi o kombinaciji strategija.

Obzirom da u današnje vreme postoji mnogo primera teorije mešovitih matričnih igara, ovde je razmatran primer jedne samostalne zanatsko trgovinske radnje kroz potencijalne kupce i deo prodajnog asortimana.

2. TEORIJSKO-METODOLOŠKE POSTAVKE RADA

2.1. Mešovite matrične igre

Kod matričnih igara, igra može biti u domenu prostih ili mešovitih matričnih igara. Sam put rešavanja matrične igre može se objasniti i preko algoritma koji je prikazan na Slici 1. Prema ovom algoritmu, matrica plaćanja može biti redukovana na matricu manjih dimenzija, nakon čega se primenjuje Waldov kriterijum, ili ukoliko to nije moguće, odmah se pristupa primeni ovog istog kriterijuma.



Slika 1. Algoritam rešavanja matričnih igara (Radić, 2020)

Kada matrica plaćanja nema sedlastu tačku, rešavanje problema se komplikuje pa se moraju primeniti i druge metode. U ovom radu obradiće se direktne metode i to analitičke i grafičke. Analitički metod može biti primenjen putem direktnih formula ili parcijalnih izvoda.
Posmatramo dva igrača A i B. Igrač A ima *m* alternativa - strategija, dok igrač B ima *n* alternativa. Shodno tome, igrači A i P te strategije biraju sa verovatnoćama $p_1,\ldots,p_m$ odnosno $q_1,\ldots,q_n$ i pri tome važi:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \tag{2}$$

Vektor P = $(p_1, \ldots, p_m)$ nazivamo mešovitom strategijom igrača A, dok vektor Q = $(q_1,\ldots,q_n)$ nazivamo mešovitom strategijom igrača B. kod čiste strategije jedna verovatnoća jednaka je 1, a sve ostale su 0. Kod mešovite strategije najmanje dve verovatnoće moraju biti pozitivne (Dixit, 2024).

2.1.1. Direktna priimena formula

Najjednostavniji slučaj je matrica tipa 2x2, pa je na njenom primeru podesno objasniti formule koje se koriste u direktnoj primeni.

Neka je matrica plaćanja označena kao:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

I neka je $P^*(p_1, p_2)$ optimalna strategija igrača A, $Q^*(q_1, q_2)$ optimalna strategija igrača B, a V vrednost igre. Tada važi:

$$p1 = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \tag{3}$$

$$p2 = 1 - p1 \tag{4}$$

$$q1 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \tag{5}$$

$$q2 = 1 - q1 \tag{6}$$

$$V = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \tag{7}$$

2.1.2. Grafički metod

Grafički metod (metoda) zasniva se na geometrijskoj interpretaciji, pri čemu se mora prvo krenuti od jednog igrača. Mi sami biramo od kog igrača ćemo krenuti. Za igrača za kog smo se odlučili, sastavljamo nejednačine na osnovu matrice plaćanja. Ukoliko smo počeli od igrača A, onda moramo pronaći parametre p_1 i p_2 koji određuju njegovu optimalnu strategiju P* (Milovanović, 2019). Daljim matematičkim proračunom, tj. rešavanjem jednačina i primenom analitičke geometrije, dolazimo do jednačina pravih za igrača A.

Dobijaju se dve prave koje se seku i u njihovom preseku nalazi se tačka P* koja u stvari predstavlja optimalnu strategiju igrača A.

Na sličan način sastavljamo nejednačine za igrača B, s tim što je odnos prema vrednosti igre V u prvom slučaju ≥, a u drugom ≤.

2.1.2. Lindo program

Lindo (*engl.* Linear Interactive and Discrete Optimizer) predstavlja interaktivni softverski paket koji je razvijen od strane kompanije Lindo System Inc., USA (LINDO) i može koristiti u svim aplikacijama gde je potrebno izvršiti optimizaciju. Softverski paket Lindo v.6.1. funkcioniše tako što se u njega unose funkcija cilja i ograničenja i brzo se dobijaju gotova rešenja (Milovanović, 2019; LINDO, 2024).

Da bi se definisao problem u Lindo v.6.1. programu koriste se oznake y_i i z_0, za igrača A, xj i g_0 za igrača B (Milovanović, 2019), kao i sledeće formule:

$$V = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{g_0} \tag{8}$$

$$p_i = y_i \cdot V \tag{9}$$

$$q_j = x_j \cdot V \tag{10}$$

3. REZULTATI PRAKTIČNOG PRIMERA

Primena direktnih metoda za rešavanje problema mešovitih matričnih igara će u ovom radu biti prikazana na primeru SZTR za proizvodnju nameštaja pod imenom “XXX” u cilju zaštite podataka. SZTR “XXX” proizvodi i prodaje različite komade nameštaja namenjene kako fizičkim, tako i pravnim licima. U Tabeli 1 su prikazane cene po različitim vrstama nameštaja u odnosu na dve vrste kupaca, fizička i pravna lica.

Tabela 1. Prodajne cene dela asortimana SZTR “XXX”

Cene u hiljadama RSD	Fizičko lice	Pravno lice
Sto	11	9
Stolica	5	4
Orman	20	14
Vitrine	15	16
Polica	10	8

U cilju pojednostavljenja daljeg postupka obrade podataka pristupa se redukciji. Nakon izvršene redukcije izgled početne matrice plaćanja prikazan je u Tabeli 2.

Tabela 2. Matrica plaćanja nakon redukcije

		Potencijalni kupac	
		Fizičko lice	Pravno lice
SZTR “XXX”	Orman	20	14
	Vitrine	15	16

Kako bi se proverilo da li je reč o prostim ili mešovitim matričnim igrama, mora se potražiti “sedlasta tačka”, što se postiže primenom Waldovog kriterijuma (Tabela 3).

Tabela 3. Primena Waldovog kriterijuma

		Potencijalni kupac		Min *j*	Max *i*
		Fizičko lice	Pravno lice		
SZTR “XXX”	Orman	20	14	14	15
	Vitrine	15	16	15	
	Max *i*	20	16	15 ≤ V ≤ 16	
	Min *j*	16			

Na osnovu rezultata prikazanih u Tabeli 3, može se zaključiti da ova igra pripada mešovitim matričnim igrama, obzirom da ne postohi sedlasta tačka. Vrednost igre V nalazi se između 15 i 16., tj. 15 ≤ V ≤ 16.

3.1. Rešavanje definisanog problema pomoću analitičkog metoda direktnom primenom formula

Radi bolje preglednosti prikaz elemenata koji će biti korišćeni u formulama dat je u Tabeli 4.

Tabela 4. Potrebni elementi matrice za primenu formula

		Potencijalni kupac	
		Fizičko lice (q1)	Pravno lice (q2)
SZTR “XXX”	Orman (p_1)	20	14
	Vitrine (p_2)	15	16

Direktnom primenom formula dobija se sledeće:

$$p1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{16 - 15}{20 + 16 - 14 - 15} = \frac{1}{7}$$

$$p2 = 1 - p1 = \frac{6}{7}$$

$$q1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{16 - 14}{20 + 16 - 14 - 15} = \frac{2}{7}$$

$$q2 = 1 - q1 = \frac{5}{7}$$

$$V = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{16 \cdot 20 - 14 \cdot 15}{20 + 16 - 14 - 15} = 15{,}71\ n.j.$$

Odnosno:

p_1=14,29 %; p_2=85,71%; q_1=28,57%; q_2=71,43%

3.2. Rešavanje definisanog problema pomoću grafičke metode

Kao polazni podaci koristiće se podaci iz Tabele 4, pri čemu se formira sistem nejednačina za SZTR “XXX”:

$20\ p_1 + 15\ p_2 \geq V$

$14 p_1 + 16\ p_2 \geq V$

Optimalna mešovita strategija SZTR"XXX" dobija se uz uslov $p_1+p_2 = 1$, odnosno, $p_2 = 1-p_1$, pa se dobija sledeće:

l1: $20\ p_1+15\ p_2 \geq V$
$20\ p_1+15\ (1-p_1) = V$
$20\ p_1+15-15p_1 = V$
$5p_1+15 = V$
$p_1 = 0 \rightarrow V = 15$
$p_1 = 1 \rightarrow V = 20$

l2: $14\ p_1+16\ p_2 \geq V$
$14\ p_1+16\ (1-p_1) = V$
$14\ p_1+16-16p_1 = V$
$-2p_1+16 = V$
$p_1 = 0 \rightarrow V = 16$
$p_1 = 1 \rightarrow V = 14$

Grafičko rešenje nalazi se u preseku prava l_1 i l_2, što se dobija izjednačavanjem njihovih jednačina:

$5p_1+15 = -2p_1+16$

$5p_1+2p_1 = 16-15$

$7p_1 = 1$

$p_1 = 1/7 = 0{,}1429$

$p_2 = 1-p_1 = 6/7 = 0{,}8571$

Na taj način se dobija optimalna mešovita strategija SZTR "XXX" P*(1/7; 6/7). Ukoliko se p_1 i p_2 zameni u bilo kojoj jednačini prave l_1 ili l_2, dobiće se vrednost igre V:

$5p_1+15 = V$

$5/7+15= V$

$V= 15{,}71$

Kako bi se dobila i optimalna strategija potencijalnih kupaca formira se sistem nejednačina:

$20\ q_1+14\ q_2 \leq V$

$15q_1 + 16\ q_2 \leq V$

Uz uslov $q_1+q_2 = 1$, odakle sledi, $q_2 = 1-q_1$:

l1: $20\ q_1+14\ q_2 \leq V$
$20\ q_1+14\ (1-q_1) = V$
$20\ q_1+14-14q_1 = V$
$6q_1+14 = V$
$q_1 = 0 \rightarrow V = 14$
$p_1 = 1 \rightarrow V = 20$

l2: $15\ q_1+16\ q_2 \leq V$
$15\ q_1+16\ (1-q_1) = V$
$15\ q_1+16-16q_1 = V$
$-q_1+16 = V$
$q_1 = 0 \rightarrow V = 16$
$q_1 = 1 \rightarrow V = 15$

Grafičko rešenje u preseku prava l_1 i l_2:

$6q_1+14 = -q_1+16$

$6q_1+q_1 = 16-14$

$7q_1 = 2$

$q_1 = 2/7 = 0{,}2857$

$q_2 = 1\text{-}q_1 = 5/7 = 0{,}7143$

Na taj način se dobija optimalna mešovita strategija kupaca Q*(2/7; 5/7).

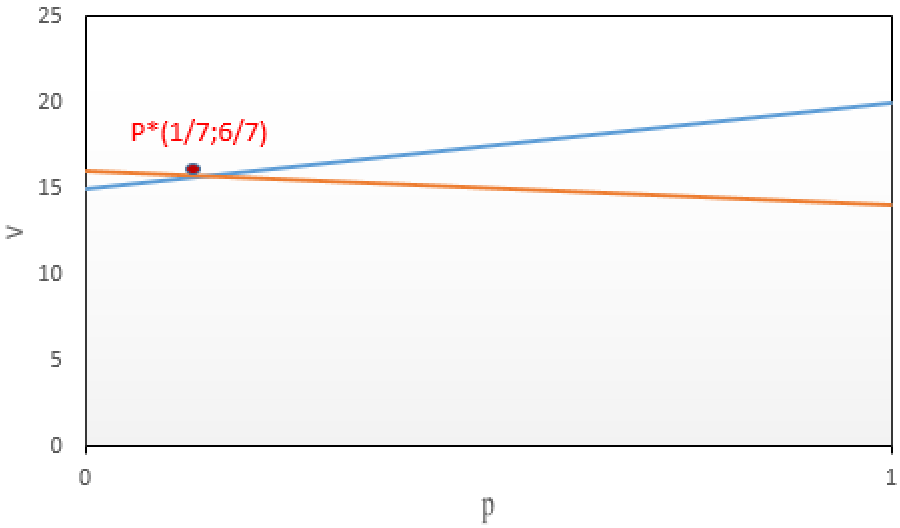
Ukoliko se q_1 i q_2 zameni u bilo kojoj jednačini prave l_1 ili l_2, dobiće se vrednost igre V:

$6q_1+14 = V$

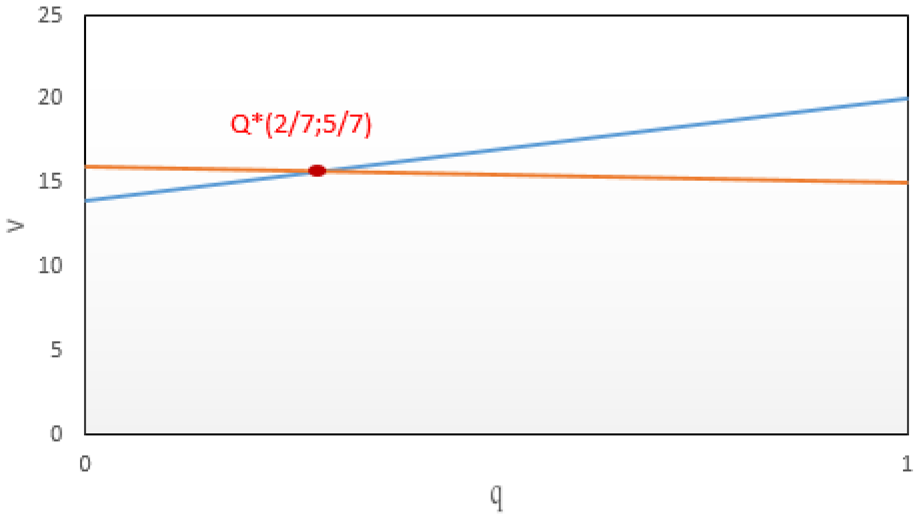
$12/7+14= V$

$V= 15{,}71$

Grafički prikaz rešenja zadatog problema prikazan je na Slikama 2 i 3.



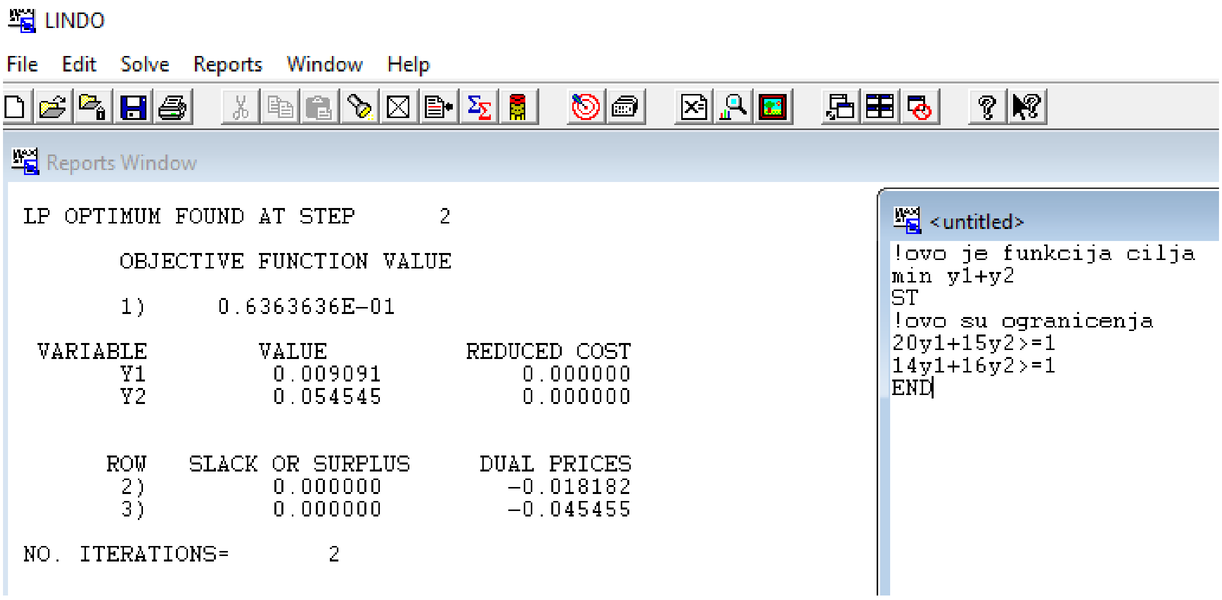
Slika 2. Grafički prikaz opimalne strategije SZTR “XXX”



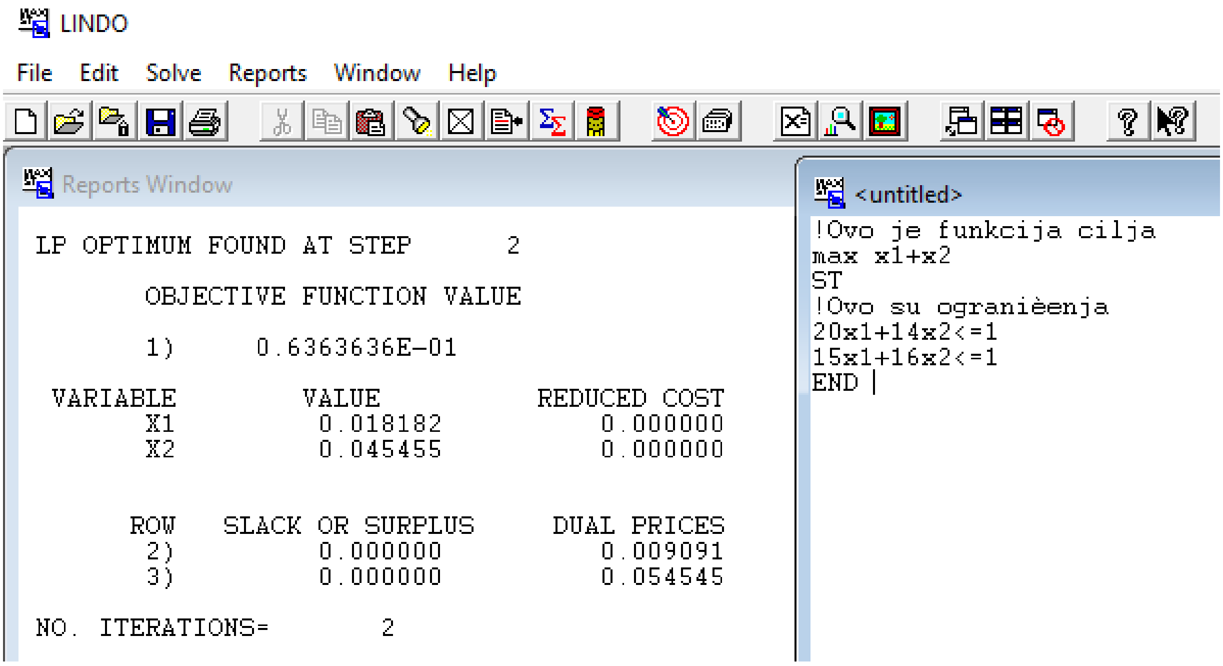
Slika 3. Grafički prikaz optimalne strategije potencijalnih kupaca SZTR “XXX”

3.2. Rešavanje definisanog problema primenom programskog paketa LINDO

Provera tačnosti prethodnih rezultata izvršena je primenom softvera LINDO 6.1, što je prikazano na Slikama 4 i 5.



Slika 4. Rezultati primene Lindo programa za SZTR ”XXX”



Slika 5. Rezultati primene Lindo programa za potencijalne kupce SZTR ”XXX”

Tumačenje rezultata Lindo programa za SZTR “XXX”:

$z_0 = 0{,}06363636$

$V = 1/z_0 = 1/0{,}06363636 = 15{,}71$

$Y_1 = 0{,}009091$; pa je $p_1 = Y_1 \cdot V = 0{,}009091 \cdot 15{,}71 = 0{,}2857 = 14{,}29$ %

$Y_2 = 0{,}045455$; pa je $p_2 = Y_2 \cdot V = 0{,}045455 \cdot 15{,}71 = 85{,}71$ %

Na sličan način se tumače rezultati za potencijalne kupce SZTR “XXX”:

$g_0 = 0{,}06363636$

$V = 1/g_0 = 1/0{,}06363636 = 15{,}71$

$X_1 = 0{,}018182$; pa je $q_1 = X_1 \cdot V = 0{,}018182 \cdot 15{,}71 = 0{,}1429 = 28{,}57$ %

$X_2 = 0{,}054545$; pa je $q_2 = X_2 \cdot V = 0{,}054545 \cdot 15{,}71 = 0{,}7143 = 71{,}43$ %

4. DISKUSIJA REZULTATA

Imajući u vidu sve prethodne rezultate, odnosno rezultate dobijene direktnom primenom formula, grafičkom metodom i primenom LINDO softvera, zaključujemo da su svi rezultati identični. To potvrđuje sledeće:

P* je optimalna mešovita strategija SZTR “XXX” i to: P*(1/7;6/7), što znači da postoji 14,29 % verovatnoće da će SZTR “XXX” proizvoditi orman i 85,71 % verovatnoće da će proizvoditi vitrine

Q* je optimalna mešovita strategija potencijalnih kupaca i to: Q*(2/7;5/7), što znači da postoji 28,57 % verovatnoće da će fizičko lice kupiti nameštaj SZTR “XXX” i 71,43 % verovatnoće da će pravno lice obaviti kupovinu kod istog SZTR

Takođe, proračunata vrednost V = 15,71 n.j.koja je dobijena svim metodama, nalazi se u opsegu $15 \leq V \leq 16$, čime je još jednom potvrđena ispravnost dobijenih rezultata.

5. ZAKLJUČAK

Teorija igara, kao i mešovite matrične igre imaju primenu u svakodnevnom životu. U ovom radu kao primer primene prikazan je deo prodajnog asortimana jedne radnje u zavisnosti od vrste potencijalnih kupaca. Dobijene vrednosti optimalnih strategija putem analitičkog i grafičkog metoda identične su, kao i putem Lindo programa. Identičnost rezultata govori u prilog tačnosti modela.

Dobijena vrednost igre predstavlja prodajnu cenu proizvoda iz odabranog asortimana radnje, ali istovremeno i kupovnu cenu. Na taj način, korišćenjem mešovitih matričnih igara može se pomoći kako u odabiru određenog proizvoda sa stanovišta kupaca, tako i ukazivanjem na možda ciljanu proizvodnju samog proizvođača.

APPLICATION DIRECT METHODS FOR SOLVING MIXED MATRIX GAMES ON THE EXAMPLE OF AN SZTR

Ognjen Milosavljević
University of Belgrade, Technical Faculty in Bor, Engineering Management Department
Bor, Serbia

Abstract

This paper demonstrates the application of direct methods for solving mixed matrix games through the example of an independent trading shop. The optimal strategies of players in the game and the value of the game were obtained using analytical and graphical methods, with validation of results using the Lindo v.6.1 software package. By solving the problem, it was concluded that the optimal strategies of players are P* = (14.29%, 85.71%) and Q* = (28.57%, 71.43%), with the value of the game being V=15.71 (expressed in thousands of RSD). The value of the game represents the highest selling price and simultaneously the lowest purchase price of products from the selected range. By applying these methods, the performance of companies can be improved by focusing on specific types of sought-after products.

Ključne reči: *game theory, mixed matrix games, analytical method, graphical method, Lindo*

LITERATURA / REFERENCES

Dixit, A. (2024). Game Theory Explained, Available at: https://shorturl.at/xY8n2; Pristupljeno: Maj 2024.

Jovanović, I. (2016). Operaciona istraživanja II - teorija igara, Autorizovana predavanja, Tehnički fakultet u Boru, Bor.

Radić A. (2020). Primena direktnih metoda mešovitih matričnih igara na primeru poljoprivredne proizvodnje, Engineering management, 6 (1), 42-52

Milovanović, A. (2019). Application of direct methods for solving mixed matrix games, XV Students Symposium on Strategic Management – IMCSM19, Bor, Serbia

LINDO, (2024). Lindo software. Available: https://www.lindo.com/index.php; Pristupljeno: maj 2024.