UVOD

Predmet kojim se bave operaciona istraživanja je upravljanje organizacionim, tehničkim i drugim složenim sistemima. Cilj je iznalaženje optimalnih rezultata za pripremanje i donošenje upravljačkih odluka i praćenje njihovog izvršenja. Osnovna karakteristika savremenog (postindustrijskog) društva je postojanje složenih sistema. Primeri složenih tehničkih sistema su: tehnološko-proizvodni, energetski, komunikacioni, transportni sistemi, vodosnabdevanje.
U okviru složenih sistema su podsistemi i njihovi elementi sa vezama i interakcijama izmedju sebe i izmedju sistema i njegove okoline.

Složeni sistemi se sastoje od podsistema i elemenata, sa različitim nivoima veza izmedju elemenata (od veoma slabih do krutih), sa medjusobnim uticajima koji mogu biti deterministički ili stohastički, sa sledećim glavnim karakteristikama:

- višekriterijumski cilj, pri čemu su lokalni podciljevi često u koliziji,
- hijerarhijska struktura sistema, sa jasno definisanim podsistemima do elementarnog podsistema - elementa sistema,
- definisana je granica sistema, sa izraženim medjusobnim uticajima sistema i okruzenja,
- rast sistema.

U ovakvim uslovima, upravljanje se mora vršiti metodično, sa programom. Pod programom se podrazumeva planiranje odluka - plan i upravljanje realizacijom plana.

U ovim predavanjima težište je dato razvijenim metodama operacionih istraživanja, mogućnosti njihove primene a kroz prikaz različitih primera i razvijenog softvera.

Operaciona istraživanja su nastala početkom četrdesetih godina u Velikoj Britaniji, formiranjem grupe istraživača, čiji je osnovni zadatak bio da "primenom postojećih i razvojem novih naučnih metoda na kvantitativnim osnovama daju odgovore po pitanju najboljeg ili "dovoljno dobrog" funkcionisanja: tehničkih, organizacionih, ekonomskih i drugih sistema u postojećim uslovima. Početkom pedesetih godina nastavolo se sa razvojem nove discipline, koja u osnovi sadrži integraciju raznih disciplina. Za veoma kratko vreme, ova nauka dala je privredi značajan niz korisnih metoda za rešavanje brojnih zadataka iz industrije, eksploatacije rudnog bogatstva, transporta, nalaženja optimalnog proizvodnog programa, utvrdjivanje najboljeg redosleda operacija u proizvodnji, planiranja realizacije složenih projekata i sl.

U okviru predavanja biće obradjene sledeće oblasti i teme:

1. Upotreba modela i prilaz proučavanju
2. Linearno programiranje
3. Nelinearno programiranje
4. Dinamičko programiranje
5. Optimalno rezerviranje
6. Teorija igara
7. Tehnika mrežnog planiranja
8. Teorija redova čekanja
9. Simulacija rada diskretnih procesa
10. Upravljanje zalihama

1.0. UPOTREBA MODELA I PRILAZ PROUČAVANJU

Osnovna ideja operacionih istraživanja je ista kao i u bilo kojoj drugoj naučnoj disciplini, a to je izgradnja modela. Bitna razlika se sastoji u tome što se operaciona istraživanja bave sistemima kojima se može rukovati i kojima se može upravljati.

Model je koristan u najmanje sedam sledećih funkcija: (1) kao pomoć u razmišljanju, (2) kao pomoć u komuniciranju, (3) kao orudje za prognoziranje, (4) kao pomoć u upravljanju, (5) kao sredstvo za obuku i instruktažu, (6) za analizu osetljivosti i (7) kao pomoć pri donošenju odluke.

Interesantna je sedma funkcija – model kao pomoć pri donošenju odluka. Poznato je da postoje tri nivoa odluka: **strateški, taktički i tehnički (operativni).** Od samog početka su operaciona istraživanja korišćena i primenjivana na različite probleme kao pomoć u donošenju odluka. Medjutim, većina ovih odluka je po svojoj prirodi bila taktička. Operaciona istraživanja su veoma retko korišćena za donošenje tehničkih odluka. Razlika izmedju strateških i taktičkih odluka sastoji se najmanje od tri karakteristike problema od kojih svaka poseduje odredjen stepen slobode. Strateške odluke su orijentisane u pravcu ishoda, odnosno povezane su sa ciljevima, od dužeg su domena i uticaja i donose se za duži period. Nasuprot tome taktičke odluke su povezane sa optimizacijama da bi se postigli raniji postavljeni ciljevi i karakterišu se užim domenom i uticajem, a donose se za kraći period. U novije vreme operaciona istraživanja su počela da se koriste i za donošenje strateških odluka u državnim organima, a i u industrijskim asocijacijama.

Klasifikacija problema operacionih istraživanja

Svaki problem kojim se bave operaciona istraživanja poseduje i formu i sadržaj. Forma se odnosi na način na koji su parametri i promenljive povezani jedni s drugim, na primer linearno. Sadržaj ukazuje na prirodu pojedinih veličina, tako na primer x predstavlja rastojanje a y troškove.

Klasifikacija se može izvršiti prema primenjenim metodologijama, kao što su problemi linearnog programiranja, problemi dinamičkog programiranja, teorija čekanja, simulacija rada sistema i tako dalje.

Klasifikacije prema oblasti primene, kao što su: finansiranje i investicije,, zalihe, upravljanje proizvodnjom, pouzdanost, zamene dotrajalih delova i tako dalje.

Prilaz proučavanju operacionih istraživanja

U metodologiji pristupa proučavanju predmeta operacionih istraživanja, može se ići linijom najmanjeg otpora i izložiti metodološku klasifikaciju operacionih istraživanja. Ovo je uobičajeni prilaz, u što se može uveriti ako se pogleda bilo koji priručnik iz oblasti operacionih istraživanja. Ovakvim prilazom se obično naglašava orudje (metodologija), a ne problem, što često navodi na pogrešan zaključak da operaciona istraživanja predstavljaju skup različitih metoda. i što je još gore, čitalac se nepotrebno iscrpljuje i na kraju takvog priručnika je obično razočaran jer nije našao odgovor na pitanje **„Šta da radim sa svom ovom teorijom?”.**

Da do ovoga ne bi došlo, nastojaće se da se izlaganje usmeri na operativne sisteme i probleme koji se u njima javljaju. Ovo će opravdati neophodnost izgradnje modela za proučavanje ovih sistema. Čitalac će tako u svakom trenutku biti u stanju da sagleda šta je uslovilo razvoj ovih modela i šta je uslovilo razvoj odgovarajućeg orudja i metodologije, pa će, prema tome, biti u stanju da ovu metodologiju i koristi.

2.0. LINEARNO PROGRAMIRANJE (LP)

U savremenim uslovima menadžmenta u privredi, vanprivrednim delatnostima, vojsci, ili u državi u celini, pojavljuju se problemi koji po pravilu imaju više alternativnih rešenja. Uloga menadžera je, da polazeći od odredjenih zakonitosti, usvojene strategije, zahteva i ograničenja odabere ona rešenja koja su u datim uslovima optimalna.

Zadaci koji se rešavaju su:

- optimalno planiranje investicionog ulaganja,
- definisanje optimalnog proizvodnog programa,
- izbor lokacije kompanije, pojedinih pogona ili postrojenja unutar kompanije, ili razmeštaj mašina i radnih mesta u jednom pogonu,
- izbor i razmeštaj sredstava naoružanja,
- izbor optimalne varijante tehnološkog procesa,
- sastavljanje optimalnih planova (transporta, ishrane, zaliha), itd.

Kod rešavanja ovih zadataka primenjuje se kriterijum maksimuma ili minimuma. Na maksimum treba dovesti prihod ili profit, iskorišćenje resursa, produktivnost, gotovost, raspoloživost itd. Na minimum treba svesti utrošeno vreme za realizaciju neke aktivnosti, troškove, utrošak materijala, vreme i distance transporta robe ili poluproizvoda itd.

Zadaci koji se sa aspekta matematičkog modela M svode na linearno programiranje svode se na fukciju cilja (funkciju kriterijuma) F(X), koja predstavlja linearnu kombinaciju nepoznatih, pri odredjenom skupu ograničenja L, koja su takodje zadata linearnim jednačinama ili nejednačinama.

Matematički, problem se sastoji u tome kako naći maksimum ili minimum jedne linearne funkcije F(X) pri datom skupu ograničenja L.

Postojanje računara i razvijenih softvera omogućuje brzo dobijanje rešenja u problemima sa velikim brojem promenljivih i u različitim varijantama, što omogućuje eksperimentisanje na modelu.

Najveća pažnja se posvećuje zapravo jasnoj formulaciji zadatka i pravilnoj postavci problema. Za praktičare iz ove oblasti više nije pitanje kako rešavati zadatke LP-a, nego kako takve probleme u praksi otkrivati i pravilno formulisati. Ovde u punom značenju dolazi do izražaja poznata izreka u matematici „jasno formulisan problem je više nego polovina rešenja”.

2.1. Opšta formulacija zadatka Linearnog Programiranja (LP)

Opšta matematička formulacija zadatka LP se sastoji u tome da se odredi takav skup vrednosti $x_1, x_2, ...x_n$, koje su komponente n-dimenzionog vektora $X = [x_1, x_2 .....x_n]$ iz oblasti D, koja je zadana sistemom linearnih jednačina i/ili nejednačina,

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i , \quad i = 1,...,m \tag{1}$$

$$x_j \geq 0, (j = 1,2,...n)$$

za koje je funkcije cilja (ili kriterijuma):

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2}$$

dostiže ekstremnu vrednost (maksimum ili minimum).

2.2. Grafička metoda

Grafička metoda je veoma prikladna i pregledna, ali se može primenjivati na probleme linearnog programiranja sa dve nepoznate.

Sistem ograničenja je:

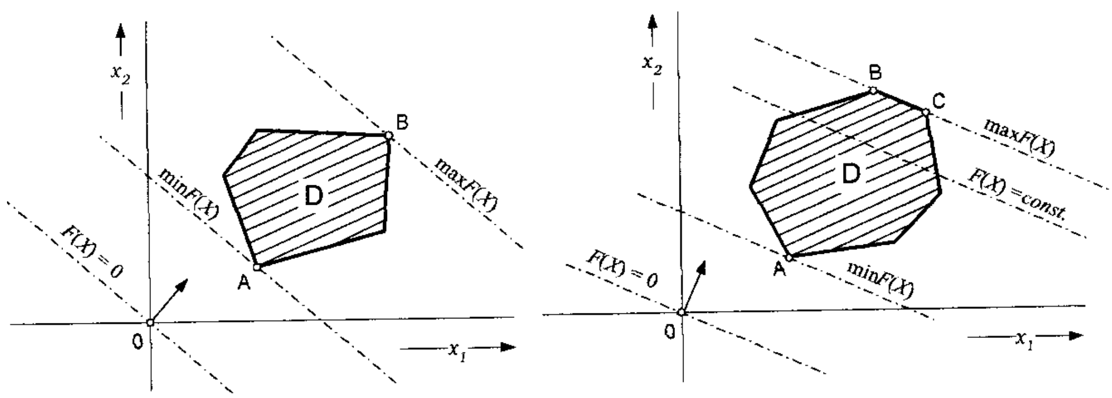
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i\,, \quad i = 1,\dots,m$$

Ovaj sistem treba predstaviti grafički, u koordinatnom sistemu x_1-x_2, a zatim za postavljenu funkciju cilja, koja u ovom slučaju ima oblik

$$F(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

odrediti minimalnu, odnosno maksimalnu vrednost. Grafički prikaz ograničenja je konkavna (konveksna) oblast dopustivih rešenja *D*, preko koje se translira funkcija cilja $F(X) = 0$, i odredjuje njen minimum, odnosno maksimum.

Rešenje sistema je ono $X^* = [x_1 \quad x_2]^T$, za koje je $F(X^*) = \max F(X)$, odnosno, $F(X^*) = \min F(X)$, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Grafički prikaz rešenja dvodimenzionalnog problema

2.2.1. Primeri primene grafičke metode

Primer 1

Korišćenjem grafičke metode LP za sledeću funkciju kriterijuma

$$F(X) = 2x_2 - x_1$$

i ograničenja

$$L_1 : x_1 + x_2 \le 6$$
$$L_2 : x_2 \ge 1$$
$$L_3 : -3x_1 + 2x_2 \le -3$$
$$L_4 : -2x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 0$$

odrediti:

a. Optimalnu vrednost promenljivih (x_1, x_2) i minimalnu vrednost funkcije kriterijuma.

b. Optimalnu vrednost promenljivih (x_1, x_2) i maksimalnu vrednost funkcije kriterijuma.

Rešenje:

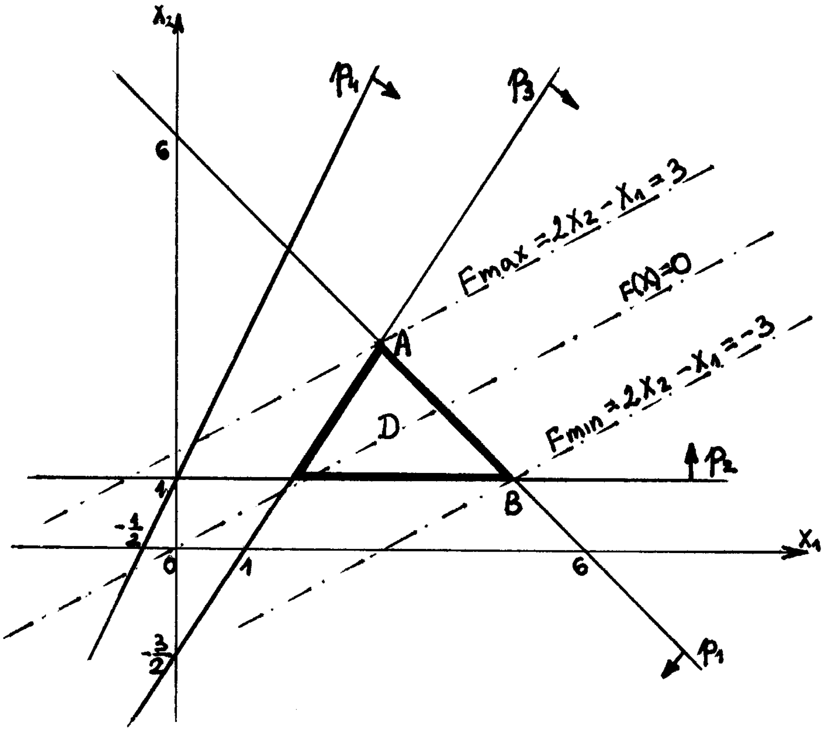
a. Minimalnu vrednost funkcija kriterijuma dostiže u tački $B(5,1)^*$, koja je u preseku pravih p_1 i p_2. Imamo da je:

$$X^* = X_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_{\min} = F(X_B) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

b. Maksimalnu vrednost funkcija kriterijuma dostiže u tački $A(3,3)$, koja je u preseku pravih p_1 i p_3.

$$X^* = X_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad F_{\max} = F(X_A) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

Rešavanje zadatka je prikazano na slici 2. Oblast dopustivih rešenja (trougao) je predstavljena podebljano i označena sa *D*.



Slika 2. Grafičko rešenje Primera 1

Primer 2:

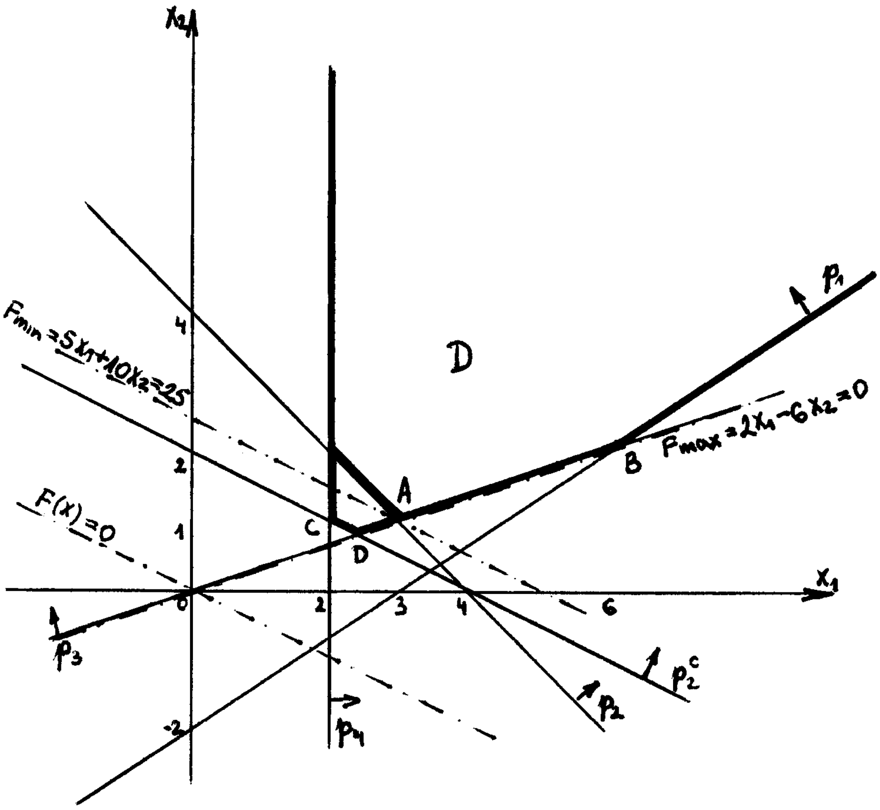
Odrediti minimalnu vrednost funkcije kriterijuma $F(X) = 5x_1 + 10x_2$ uz sledeća ograničenja,

$$L_1 : 2x_1 - 3x_2 \leq 6$$
$$L_2 : x_1 + x_2 \geq 4$$
$$L_3 : -x_1 + 3x_2 \geq 0$$
$$L_4 : x_1 \geq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Rešenje:

a. Optimalno rešenje je u tački $A(3,1)$, koja je u preseku pravih p_2 i p_3, a za koju funkcija kriterijuma dostiže minimum, kao što je prikazano na slici 3:

$$X^* = X_A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad F_{\min} = F(X_A) = 5 \cdot 3 + 10 \cdot 1 = 25$$



Slika 3. Grafičko rešenje

Primer 3:

Fabrika proizvodi vratila V1 i V2 na strugovima S1 i S2.

Potrebno (normirano vreme) izrade je: Za vratilo V1 na strugu S1 je 2.5 h i na strugu S2 je 6 h, a za vratilo V2 je na strugu S1 5.5 h i na strugu S2 je 3.5 h.

Dnevna raspolozivost strugova je: Strug S1 – 15 h/dan, a strug S2 – 21 h/dan.

Uraditi:

- grafickom metodom odrediti proizvodni asortiman koji garantuje maksimalno iskorišćenje mašina.
- odrediti optimalnu količinu proizvoda za 97 radnih dana?

Rešenje:

Podaci iz zadatka se mogu prikazati kao u sledećoj tabeli:

Strugovi ⇒ Proizvodi ⇓	S1	S2	Ukupno vreme izrade (h/kom)
V1	2.5	6	8.5
V2	5.5	3.5	9
Raspoloživi kapacitet (h/dan)	15	21	

a) F-ja cilja koja garantuje najbolje iskorišćenje kapaciteta mašina je:

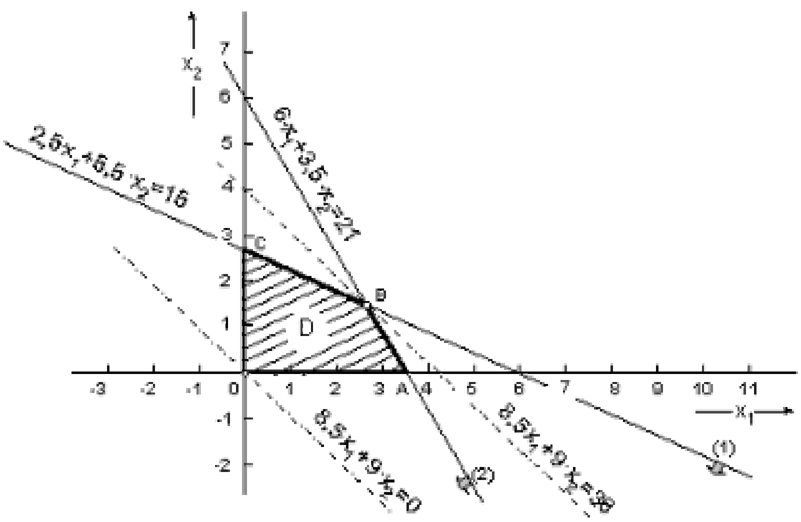
$$\max F(x) = 8.5 \bullet x_1 + 9 \bullet x_2$$

Ograničenja predstavljaju dnevni raspoloživi kapaciteti, pošto se na strugovima izradjuju i drugi elementi. Ograničenja se mogu prikazati kao:

$$25x_1 + 5.5x_2 \leq 15$$
$$6x_1 + 3.5x_2 \leq 21$$

Prirodni uslovi nenegativnosti su: $x_1 \geq 0; \_ x_2 \geq 0$.

Dopustiva oblast i f-ja cilja su prikazani na slici 4.



Slika 4. Grafičko rešenje

Optimalno rešenje je u tački B, u preseku pravih ograničenja 1 i 2.

$$X^* = X_B = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252/97 \\ 150/97 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2,6 \\ 1,54 \end{bmatrix} \text{(kom)}$$

Vrednost funkcije cilja je:

$$\max F(X) = 8,5\, x_1^* + 9x_2^* = 36 \text{ (h).}$$

Maksimalno iskorišćenje mašina će biti u slučaju da se dnevno proizvodi ≈ 2.6 kom. vratila tipa V1 i ≈1.54 kom. vratila tipa V2.

Za vremenski period od τ = 97 (dana), optimalna proizvodnja (proizvodnja koja garantuje najbolje vremensko iskorišćenje mašina) će iznositi:

$$Q^* = \tau \cdot \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = 97 \cdot \begin{bmatrix} 252/97 \\ 150/97 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 252 \\ 150 \end{bmatrix} \text{(kom).}$$

Primer 4:

Fabrika proizvodi artikle P1 i P2. Proizvodni proces se odvija na linijama L1, L2 i L3. Tehnologija izrade je takva, da za proizvodnju artikla P1 zahteva: 1,2 (h/kom) na L1, 2 (h/kom) na L2 i 2 (h/kom) na L3. Za proizvodnju P2 potrebno je utrošiti: 2,4 (h/kom) na L1, 2(h/kom) na L2 i 1 (h/kom) na L3. U razmatranom periodu, efektivni raspoloživi kapaciteti linija su: L1 - 12000 (h), L2 - 14000 (h) i L3 - 12000 (h). Ispitivanje tržišta je pokazalo da se u razmatranom periodu može plasirati do 5500 kom. artikla P1 i do 4500 kom. artikla P2. Isto ispitivanje je pokazalo, poredjenjem sa sličnim proizvodima konkurencije, da se prodajom proizvoda P1 može ostvariti dobit od 4400 (n.j./kom) za artikal P1 i 1100 (n.j./kom) za artikal P2.

Odrediti: Optimalni proizvodni program, koji garantuje maksimalnu dobit u razmatranom periodu.

Rešenje:

Podaci se mogu sistematizovati i prikazati kao u sledećoj tabeli:

Proizvodna linija ⇒ Artikli ⇓	L1	L2	L3	Mogući plasman (kom)	Dobit (n.j./kom)
P1	1.2	2	2	5500	4400
P2	2.4	2	1	4500	1100
Raspoloživi kapacitet (h)	12000	14000	12000	/	

Funkcija cilja, koja garantuje maksimalnu dobit je:

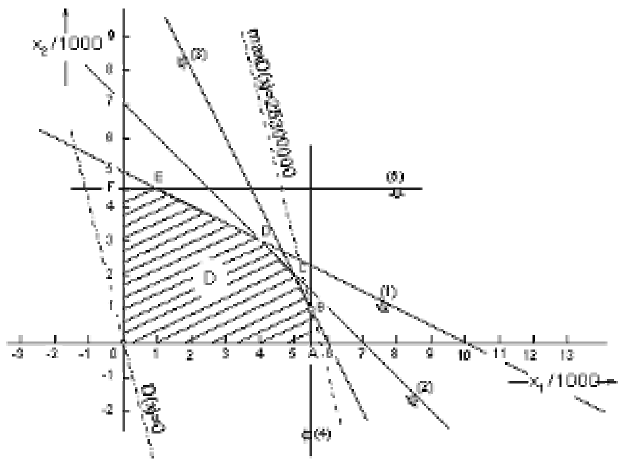
$$\max F(x) = 4400 \bullet x_1 + 1100 \bullet x_2$$

Ograničenja, koja su zadata raspoloživim kapacitetom i mogućnošću plasmana na tržištu su:

$$(1):\_1.2x_1 + 2.4x_2 \leq 12000$$
$$(2):\_2x_1 + 2x_2 \leq 14000$$
$$(3):\_2x_1 + 1x_2 \leq 12000$$
$$(4):\_x_1 \leq 5500$$
$$(5):\_x_2 \leq 4500$$

Prirodni uslovi nenegativnosti su: $x_1 \geq 0;\_x_2 \geq 0$.

Oblast dopustivih rešenje i funkcija cilja je prikazana na slici 5, sa koje se viti da funkcija cilja ima maksimalnu vrednost u tačci B.



Slika 5. Grafičko rešenje zadatka

Optimalno rešenje je dobijeno u preseku prava (3) i (4) i iznosi:

$$X^* = \begin{bmatrix} x^*{}_1 \\ x^*{}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5500 \\ 1000 \end{bmatrix} \_(kom)$$

Maksimalna dobit pri ovakvom rešenju iznosi:

$$\max F(X^*) = 4400 \bullet x_1^* + 1100 x_2^* = 25.3 \bullet 10^6 (n.j.)$$

2.3. Model linearnog programiranja u matričnom obliku

Funkcija cilja (ograničenja) je

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 * x_1 + ...+ c_n * x_n \qquad (3)$$

čiji maksimum treba odrediti.

Sistem nejednačina ograničenja je:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned} \qquad (4)$$

Ovaj sistem nejednačina se prevodi u sistem jednačina, uvodjenjem dopunskih promenljivih, na sledeći način:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{aligned} \qquad (5)$$

Dopunske promenljive imaju svoj fizički smisao, jer predstavljaju razliku izmedju raspoloživih i iskorišćenih kapaciteta, vremenskih resursa ili slično.

Funkcija kriterijuma u matričnoj formi je sada:

$$F(X) = C \bullet X = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & & c_j & & c_k & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_k \\ \\ x_{k+m} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Sistem jednačina ograničenja je:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1k} & 1 & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & & 1 & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \\ a_{m1} & & & a_{mk} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_j \\ \\ x_k \\ \\ \\ x_{k+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Matrica A (matrica koeficijenata) se može razložiti na vektor kolone, kao:

$$A^{\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{bmatrix},..A^{2\langle 1 \rangle} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \\ a_{m2} \end{bmatrix};..A^{\langle j \rangle} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \\ a_{mj} \end{bmatrix};..A^{\langle k \rangle} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \\ a_{mk} \end{bmatrix};...A^{\langle k+1 \rangle} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix};.........A^{\langle k+m \rangle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Sistem linearnih jednačina ograničenja je sada:

$$A^{\langle 1 \rangle} \cdot x_1 + A^{\langle 2 \rangle} \cdot x_2 + ...A^{\langle k+m \rangle} \cdot x_{k+m} = B$$

(9)

$$\sum_{j=1}^{n} A^{\langle j \rangle} \cdot x_j = B$$

Pošto su vektori A^j i B vektori m-tog reda to izmedju n vektora tipa A^j može postojati najviše m nezavisnih. Ako je u gornjoj jednačini prvih m vektora linearno nezavisno, vektor B se može izraziti kao:

$$A^{\langle 1 \rangle} \cdot x_1 + A^{\langle 2 \rangle} \cdot x_2 + ...A^{\langle m \rangle} \cdot x_m = B \qquad (10)$$

Izbor m vektora se može realizovati na C^m_n. Svaka kombinacija daje nov rezultat u funkciji kriterijuma, odnosno novu vrednost vektora X, tako da najbolja kombinacija donosi optimalno rešenje.

Vektorska baza se može izraziti kao:

$$Ab = \left[A^{\langle 1 \rangle} \quad . \quad . \quad A^{\langle m \rangle} \right]$$
$$\left| Ab \right| \neq 0 \tag{11}$$

Linearna kombinacija $A^{\langle 1 \rangle} \cdot x_1 + A^{\langle 2 \rangle} \cdot x_2 + ...A^{\langle k+m \rangle} \cdot x_{k+m} = B$ se može sada izraziti kao:

$$Ab \bullet X = B \tag{12}$$

Iz prethodne jednačine direktno sledi vektor promenljivih X, kao:

$$X = Ab^{-1} \cdot B; .. X \Rightarrow X_b = \left[x_1, .x_2 .... x_i, ... x_m \right] \tag{13}$$

Ovde je Ab^{-1}inverzna matrica matrice razmatrane baze. Bazična vrednost funkcije kriterijuma je:

$$F(X) = C_b \cdot X_b = C \cdot Ab^{-1} \cdot B \tag{14}$$

Svaki nebazni vektor $A^{\langle j \rangle} ..(j = m+1, n)$ se može izraziti kao linearna kombinacija baznih vektora po sledećoj formuli:

$$A^{\langle j \rangle} = Ab \cdot X_j$$
$$X_j = Ab^{-1} \cdot A^{\langle j \rangle} \tag{15}$$

U ovom slučaju vrednost funkcije kriterijuma iznosi :

$$F(X_j) = F_j = C_b \cdot Xb_j = C \cdot Ab^{-1} \cdot A^{\langle j \rangle} \tag{16}$$

2.3.1. Primeri rešenih zadataka

Neki pogon proizvodi delove A1 i A2 na mašinama M1 i M2. Potrebno vreme za proizvodnju ovih delova na mašinama, kao i ukupni raspoloživi dnevni vremenski kapaciteti mašina se daju u sledećoj tabeli:

Delovi / Mašine	Vremenski normativ za izradu (čas/kom)		Raspoloživi dnevni kapacitet mašine (čas/dan)
	A1	A2	
M1	2,5	5,5	15
M2	6	3,5	21
Ukupno vreme zrade (čas)	8,5	9	36

U sistemu zadatih ograničenja, naći maksimalnu dnevnu produkciju delova A1 i A2.

Postavka zadatka je:

Funkcija cilja:

$$\max F(x) = 8.5x_1 + 9x_2$$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} 2.5x_1 + 5.5x_2 &\le 15 \\ 6x_1 + 3.5x_2 &\le 21 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2.5x_1 + 5.5x_2 + x_3 &= 15 \\ 6x_1 + 3.5x_2 + x_4 &= 21 \\ x_i &\ge 0 \end{aligned}$$

Matrice i vektori modela su:

$$A = \begin{bmatrix} 5/2 & 11/2 & 1 & 0 \\ 6 & 7/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \end{bmatrix}; \quad [C = 17/2 \quad 9 \quad 0 \quad 0]$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = ?$$

Sada se izaberu (proizvoljno) 2 vektora iz baze (m=2)i to na primer: $A^{(1)}$ i $A^{(3)}$ kao vektore početne bazne matrice: $Ab = \left[A^{(1)}, A^{(3)}\right]$, pa je početno bazno rešenje:

$$Ab \cdot Xb = B;... \begin{bmatrix} 5/2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \end{bmatrix} \Rightarrow X_b = Ab^{-1} \cdot B$$

Ab^{-1} je inverzna matrica matrice Ab i ona se odredjuje na sledeći način:

Uslov je da je matrica A kvadratna i da je vrednost njene determinante različita od nule.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 5/2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Inverzna matrica matrice A se izračunava kao:

$$A^{-1} = \frac{(adjA)^T}{|A|}$$

Adjungovanu matricu matrice A sačinjavaju kofaktori matrice A i to:

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 5/2 \end{bmatrix};...(adjA)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 1 & -5/12 \end{bmatrix}$$

$$X_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 1 & -5/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 25/4 \end{bmatrix}$$

Moguće bazno rešenje je: $X = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 25/4 \\ 0 \end{bmatrix}$, pa je vrednost funkcije kriterijuma:

$$F(X_b) = C_b \cdot X_b = \begin{bmatrix} 17/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/2 \\ 25/4 \end{bmatrix} = 119/4$$

Ista vrednost se dobija i za drugo moguće bazno rešenje:

$$F(X) = \begin{bmatrix} 17/2 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 25/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{119}{4}$$

Pošto se svaki nebazični vektor može izraziti kao linearna kombinacija bazičnih vektora, sledi, za promenljivu x_2 da je:

$$Ab \cdot X_2 = A^{(2)};..X_2 = Ab^{-1} \cdot A^{(2)}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 \\ 1 & -5/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11/2 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 97/24 \end{bmatrix}$$

Vrednost funkcije kriterijuma je sada:

$$F_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/12 \\ 97/24 \end{bmatrix} = \frac{119}{24}$$

Kompletno rešenje je:

$$F_2 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ x_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/2 & 9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7/12 \\ 0 \\ 97/24 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{119}{24}$$

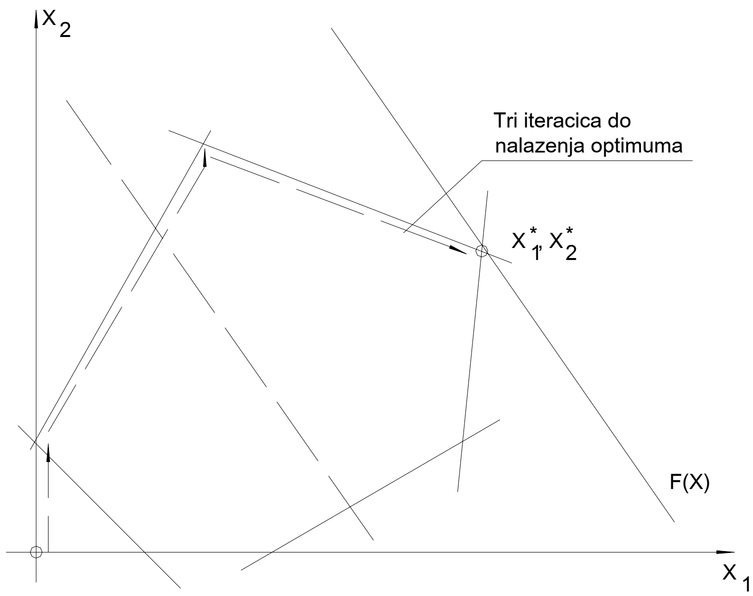
2.4. Simplex (Simpleks) metoda

Simpleks metoda je razvijena od strane poznatog američkog matematičara Dantzing-a krajem 1947. i početkom 1948. godine. U literaturi se sreće i kao Dantzingova metoda. Simpleks metoda počiva na tri bitna elementa:

1. Postoji mogućnost odredjivanja bar jednog dopustivog rešenja (plana) $X \in D$, koji se često naziva baz̆ičnim planom ili dopustivim baz̆ičnim planom;
2. Postoji mogućnost da se proveri da li je bazični dopustivi plan optimalan ili ne;
3. Postoji mogućnost, da se u slučaju da dopustivi plan nije optimalan, izabere novi, koji je bliži optimalnom.

Prema gore navedenom, simpleks metoda se zasniva na sukcesivnom poboljšanju početnog dopustivog plana, sve dok se ne dobije optimalan plan. Algoritam simpleks metode takodje omogućava da se ustanovi da li je zadatak rešiv ili ne, odnosno, da li postoji protivurečnost u ograničenjima.

Način rešavanja problema simpleks metodom se grafički može prikazati kao na slici 4, gde se polazi iz koordinatnog početka (F(X)=0) i najkraćim putem, kroz iterativni postupak se dolazi do optimuma.



Slika 4. Grafička predstava simpleks metode

2.4.1. Iznalaženje maksimalne vrednosti F(x) – *simplex - max*

Standardni oblik simpleks - max modela je dat na sledeći način:
Funkcija cilja (kriterijuma) čiji maksimum treba odrediti je :

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 * x_1 + ...+ c_n * x_n$$

Sistem nejednačina ograničenja je:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n \le b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n \le b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n \le b_m \end{aligned}$$

Ovaj sistem nejednačina se prevodi u sistem jednačina, uvodjenjem dopunskih promenljivih, na sledeći način:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...+ a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{aligned}$$

Dopunske promenljive imaju svoj fizički smisao, jer predstavljaju razliku izmedju raspoloživih i iskorišćenih kapaciteta, vremenskih resursa ili slično.

Funkcija kriterijuma sada dobija oblik:

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0(x_{n+1} + x_{n+2} + ...+ x_{n+m})$$

Na osnovu ovakvog modela, formira se nulta simpleks tabela, kao što je prikazano u tabeli 1.

Tabela 1. Nulta (početna) simpleks tabela - max ST – 0

Bazne promenljive			*Slobodne Promenljive*								
C			c_1	c_2	...	c_n	0	0	0	0	$\Theta=b/a_{ij}$
C_b	X_b	B	X_1	X_2	...	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_{n+m}	
0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	
0	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	0	0	...	0	
0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	
$F_j - c_j$		0	F_1-c_1	F_2-c_2		F_n-c_n	0	0	0	0	

Oznake u simpleks tabeli su:

C – vektor koeficijenata uz promenljive x_i funkcije kriterijuma,

C_b – vektor koeficijenata u funkciji kriterijuma uz promenljive koje sačinjavaju bazno dopustivo rešenje. Kod max ST – 0 vrednost ovih koeficijenata je 0,

X_b – vektor promenljivih bazno dopustivog rešenja,

B – vektor vrednosti promenljivih bazno dopustivog rešenja za posmatranu iteraciju,

X_j – predstavlja množitelje vektora baze,

$F_j - c_j$ – kriterijum optimalnosti.

Na osnovu kriterijuma optimalnosti se odredjuje da li je dobijeno rešanje optimalno (rešenje je optimalno u slučaju da je $F_j - c_j \geq 0\_za \forall j$), a u slučaju da rešenje nije optimalno, odredjuje koji vektor ulazi u bazu, i to je onaj za koji je:

$$\min_j (F_j - c_j), \text{ za one vrednosti za koje je } F_j - c_j < 0, \qquad (17)$$

dok se na osnovu „teta„ kriterijuma odredjuje koji vektor izlazi iz baze, tj:

$$\theta = \min_i \frac{b_j}{a_{ij}} \qquad (18)$$

Primer odredjivanja promenljive koja ulazai/izlazi u bazu je dat na slici 5.

C			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n	0	0	…	0	…	0	$\theta = b_i / a_{ij}$
C_b	X_b	B	x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+i}	…	x_{n+m}	
0	x_{n+1}	b_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	1	0	…	0	…	0	b_1/a_{1j}
0	x_{n+2}	b_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}	0	1	…	0	…	0	b_2/a_{2j}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	x_{n+i}	$b_i=b_k$	a_{i1}	a_{i2}	…	$a_{ij}=a_{kj}$	…	a_{in}	0	0	…	1	…	0	$b_i/a_{ij}=b_k/a_{kj}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	x_{n+m}	b_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	0	0	…	0	…	1	b_m/a_{mj}
$F_j - c_j$		0	F_1-c_1	F_2-c_2	…	$F_j-c_j=F_k-c_k$	…	F_n-c_n	0	0	0	0	0	0	-

Slika 5. Odredjivanje promenljive koja ulazi/izlazi iz baze

Elementi matrice Simplex tabele se preračunavaju pri svakoj iteraciji (slika 6), i to:

- transformacija elemenata van vodećeg reda i vodeće kolone (i≠u, j≠p) izvodi se kao:

$$a_{ij} \Rightarrow \hat{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{uj} \bullet a_{ip}}{a_{up}} \qquad (19)$$

- transformacija elemenata u vodećoj koloni, izuzimajući vodeći element (i≠u):

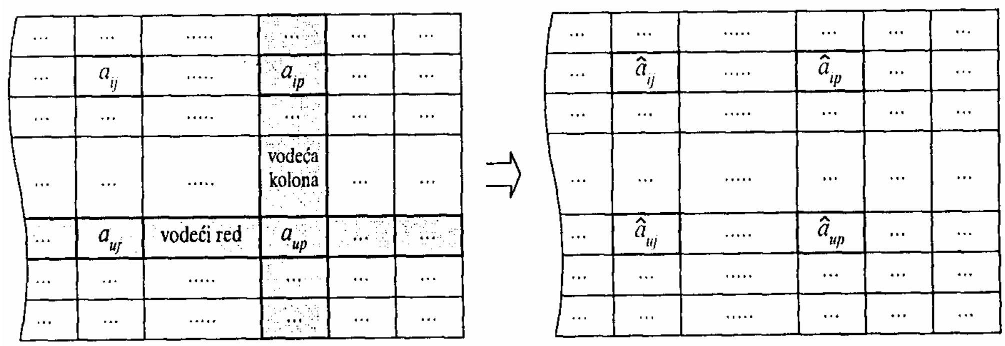
$$a_{ip} \Rightarrow \hat{a}_{ip} = 0 \qquad (21)$$

- transformacija elemenata u vodećem redu (i=u):

$$a_{uj} \Rightarrow \hat{a}_{up} = \frac{a_{uj}}{a_{up}} \qquad (21)$$

- transformacija vodećeg elementa (i=u, j=p):

$$a_{up} \Rightarrow \hat{a}_{up} = 1 \qquad (22)$$



Slika 6. Preračunavanje elemenata simpleks tabele

Ilustracija primene simpleks metode se daje kroz rešavanje sledećih primera.

2.4.1.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1:

Primenom simpleks metode naći maksimalnu vrednost funkcije cilja, uz zadata ograničenja:

$$F(X)=10x+12y+10z$$
$$x+1.25y+z\le 1050$$
$$x+y+0.5z\le 750$$
$$x+1.5y+2z\le 1200$$

U navedenom modelu promenljive se mogu označiti sa (x_1,x_2,x_3), a sve nejednačine pomnožiti odgovarajućim vrednostima, kako bi se izgubile decimale. Prvi korak primene simpleks algoritma je prevodjenje nejednakosti u jednakosti, tj:

$$F(X)=10x_1+12x_2+10x_3+0\bullet(x_4+x_5+x_6)$$
$$4x_1+5x_2+4x_3+x_4=4200$$
$$2x_1+2x_2+x_3+x_5=1500$$
$$2x_1+3x_2+4x_3+x_6=2400$$

Na osnovu ovog modela formira se polazna simpleks tabela, max ST-0. U njoj na osnovu navedenih kriterijuma se odredjuje koji vektor izlazi iz baze, a koji ulazi u bazu. Dalje se vrše linearne transformacije jednačina ograničenja, na taj način što se iz jednačina ograničenja uklanja osnovna promenljiva koja ulazi u bazu.. Postupak se ponavlja do dobijanja optimalno rešenje, tj. dok svako $F_j - c_j$ ne bude pozitivno.

max ST – 0

C			10	12	10	0	0	0	b_j / a_{i2}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	x_4	4200	4	5	4	1	0	0	840
0	x_5	1500	2	2	1	0	1	0	750
0	x_6	2400	2	3	4	0	0	1	800
$F_j - c_j$		0	-10	-12	-10	0	0	0	9000

max ST – 1

C			10	12	10	0	0	0	b_j / a_{i2}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
0	x_4	450	-1	0	1.5	1	-2.5	0	300
12	x_2	750	1	1	0.5	0	0.5	0	1500
0	x_6	150	-1	0	2.5	0	-1.5	1	60
$F_j - c_j$		9000	2	0	-4	0	6	0	240

max ST – 2

C			10	12	10	0	0	0
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	x_4	360	-0.4	0	0	1	-1.6	-0.6
12	x_2	720	1.2	1	0	0	0.8	-0.2
10	x_3	60	-0.4	0	1	0	-0.6	0.4
$F_j - c_j$		9240	0.4	0	0	0	3.6	1.6

Ova tabela sadrži optimalno rešenje, koje iznosi:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 720 & 60 & 360 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad F\left(X^*\right) = F_{\max} = 9240$$

Primer 2:

Simplex metodom rešiti problem definisanja optimalnog proizvodnog programa koji je rešavan grafičkom metodom u Poglavlju 2.2.1. (Primer 4).

Fabrika proizvodi artikle P1 i P2. Proizvodni proces se odvija na linijama L1, L2 i L3. Tehnologija izrade je takva, da za proizvodnju artikla P1 zahteva: 1,2 (h/kom) na L1, 2 (h/kom) na L2 i 2 (h/kom) na L3. Za proizvodnju P2 potrebno je utrošiti: 2,4 (h/kom) na L1, 2(h/kom) na L2 i 1 (h/kom) na L3. U razmatranom periodu, efektivni raspoloživi kapaciteti linija su: L1 - 12000 (h), L2 - 14000 (h) i L3 - 12000 (h). Ispitivanje tržišta je pokazalo da se u razmatranom periodu može plasirati do 5500 kom. artikla P1 i do 4500 kom. artikla P2. Isto ispitivanje je pokazalo, poredjenjem sa sličnim proizvodima konkurencije, da se prodajom proizvoda P1 može ostvariti dobit od 4400 (n.j./kom) za artikal P1 i 1100 (n.j./kom) za artikal P2.

Odrediti: *Optimalni proizvodni program, koji garantuje maksimalnu dobit u razmatranom periodu.*

Matematički model problema je naravno isti i glasi:

Proizvodna linija ⇒ Artikli ⇓	L1	L2	L3	Mogući plasman (kom)	Dobit (n.j./kom)
P1	1.2	2	2	5500	4400
P2	2.4	2	1	4500	1100
Raspoloživi kapacitet (h)	12000	14000	12000	/	

Funkcija cilja, koja garantuje maksimalnu dobit je:

$$\max F(x) = 4400 \bullet x_1 + 1100 \bullet x_2$$

Ograničenja, koja su zadata raspoloživim kapacitetom i mogućnošću plasmana na tržištu su:

$$(1):\_1.2x_1 + 2.4x_2 \leq 12000$$
$$(2):)\_2x_1 + 2x_2 \leq 14000$$
$$(3):\_2x_1 + 1x_2 \leq 12000$$
$$(4):\_x_1 \leq 5500$$
$$(5):\_x_2 \leq 4500$$

Prirodni uslovi nenegativnosti su: $x_1 \geq 0;\_x_2 \geq 0$.

Ograničenja se moraju transformisati, odnosno, nejednačine se prevode u jednačine uvodjenjem dopunskih promenljivih, tako da glase:

$$(1):\_1.2x_1 + 2.4x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 12000$$
$$(2):)\_2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 14000$$
$$(3):\_2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 12000$$
$$(4):\_x_1 + 0x_2\_0x3 + 0x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 = 5500$$
$$(5):\_0x_1\_1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 = 4500$$

Funkcija cilja sada glasi:

$$\max F(x) = 4400 \bullet x_1 + 1100 \bullet x_2 + 0 \bullet (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$$

Na osnovu matematičkog modela se formira nulta ST0 Simplex tabela, kao:

max ST0

C			4400	1100	0	0	0	0	0	$\theta_1 = X_0 / X_1$	$\theta_2 = X_0 / X_2$
Cb	Xb	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
0	x_3	12000	1,2	2,4	1	0	0	0	0	10000	5000
0	x_4	14000	2	2	0	1	0	0	0	7000	7000
0	x_5	12000	2	1	0	0	1	0	0	6000	12000
0	x_6	5500	1	0	0	0	0	1	0	5500	∞
0	x_7	4500	0	1	0	0	0	0	1	∞	4500
$D_i - c_i$		0	- 4400	- 1100	0	0	0	0	0	24200000	4950000

Kako u prethodnoj tabeli postoje dva negativna elementa: $D_1 - c_1 = -4400$ i $D_2 - c_2 = -1100$, može se primeniti prošireni kriterijum, koji u principu skraćuje iterativni postupak.U ovom konkretnom slučaju bi bila dovoljna i primena samo osnovnog kriterijuma koji bi uzeo u obzir najmanju vrednost: $D_1 - c_1 = -4400$.

Dopunski kriterijum glasi:

$$\min\{\frac{X_0}{X_1}\} \cdot (c_1 - D_1) = 5500 \cdot 4400 = 24{,}2 \cdot 10^6 \text{ (n.j.)} \quad \text{i}$$

$$\min\{\frac{X_0}{X_2}\} \cdot (c_2 - D_2) = 4500 \cdot 1100 = 4{,}95 \cdot 10^6 \text{ (n.j.)},$$

Na osnovu dopunskog kriterijuma se odlučuje da se u naredno bazično rešenje uvede promenljiva X_1, upravo zbog dopunskih uslova koji govore da se treba uzeti u obzir maksimalna vrednost is skupa raspoloživih vrednosti u donjem kontrolnom redu:

$$\max\{\theta_1 \cdot (c_1 - D_1), \theta_2 \cdot (c_2 - D_2)\} = \max\{24{,}2 \cdot 10^6; 4{,}95 \cdot 10^6\} \text{ (n.j).}$$

Ova vrednost fizički predstavlja dobit. Na osnovu dopunskog kriterijuma u bazno dopustiva rešenja se uvodi promenljiva X_1, dok se iz baze izvodi dopunska promenljiva X_6, pošto je u izabranoj koloni uočena najmanja vrednosr $\theta_1 = 5500$.

Daljom matričnom transformacijom (na osnovu navedenih pravila za transformaciju), oblikuju se sledeće Simplex tabele.

ST1

C			4400	1100	0	0	0	0	0	$\theta_i = X_0 / X_i$
Cb	Xb	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
0	x_3	5400	0	2,4	1	0	0	-1,2	0	2250
0	x_4	3000	0	2	0	1	0	-2	0	1500
0	x_5	1000	0	1	0	0	1	-2	0	1000
4400	x_1	5500	1	0	0	0	0	1	0	∞
0	x_7	4500	0	1	0	0	0	0	1	4500
$D_j - c_j$		$2{,}42 \cdot 10^7$	0	- 1100	0	0	0	4400	0	1100000

ST2

C			4400	1100	0	0	0	0	0
Cb	Xb	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	x_3	3000	0	0	1	0	-2,4	3,6	0
0	x_4	1000	0	0	0	1	-2	2	0
1100	x_2	1000	0	1	0	0	1	-2	0
4400	x_1	5500	1	0	0	0	0	1	0
0	x_7	3500	0	0	0	0	-1	2	1
$D_j - c_j$		$2{,}53 \cdot 10^7$	0	0	0	0	1100	2200	0

Kako su svi elementi reda ($D_j - c_j$) ≥ 0 nenegativni, pronadjeno je optimalno rešenje, koje iznosi:

$$X^* = \left[x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*\right] = \left[5500, 1000, 3000, 1000, 0, 0, 3500\right] \text{ (kom)}$$

Maksimalna vrednost funkcije dobiti se može očitati direktno iz tabele ST 2, ili se može izračunati kao:

$$\max F(X) = F\,(X^*) = 4400x_1^{\ *} + 1100x_2^{\ *} = 25{,}3 \cdot 10^6 \text{ (n.j.)}$$

Optimalno rešenje je naravno identično rešenju dobijenom grafičkom metodom, ali je istovremeno kompletnije, pošto su dobijene i vrednosti dopunskih promenljivih, čijim bi uvodjenjem u proizvodni proces bilo postignuto i potpuno vremensko iskorišćenje proizvodnih linija.

Primer 3:

Proizvodnju dva proizvoda P_1 i P_2 potrebno je realizovati na tri mašine M_1, M_2 i M_3. Vremenski normativi izrade proizvoda na ovim mašinama /min/kom/, raspoloživi vremenski kapaciteti mašina /čas/, predvidjena jedinična dobit od prodaje /din/kom/, dati su u sledećoj tabeli.

Mašine / Proizvodi	M_1	M_2	M_3	Jedinična dobit (din/kom)
P_1	450	420	270	45
P_2	450	780	90	36
Vremenski kapacitet (čas)	600	910	270	-

Potreba tržišta je ograničena, i to za proizvod P_1 plasman je moguć od najviše 55 komada, a proizvod P_2 najviše 65 kom. U cilju maksimizacije dobiti odrediti optimalni plan proizvodnje.

Matematički model problema je oblika:

$$
\begin{aligned}
&450x_1 + 450x_2 \le 36000\\
&420x_1 + 780x_2 \le 54600\\
&270x_1 + 90x_2 \le 16200\\
&x_1 \le 55\\
&x_2 \le 65\\
&F(x) = 45x_1 + 36x_2\,, \quad F_{\max} = ?
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&450x_1 + 450x_2 + x_3 = 36000\\
&420x_1 + 780x_2 + x_4 = 54600\\
&270x_1 + 90x_2 + x_5 = 16200\\
&x_1 + x_6 = 55\\
&x_2 + x_7 = 65\\
&F(x) = 45x_1 + 36x_2 + 0 \cdot \sum_{j=3}^{7} x_j\,, \quad F_{\max} = ?
\end{aligned}
$$

max ST – 0

C			45	36	0	0	0	0	0	b_j / a_{i1}	b_j / a_{i2}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7		
0	x_3	36000	450	450	1	0	0	0	0	80	80
0	x_4	54600	420	780	0	1	0	0	0	130	70
0	x_5	16200	270	90	0	0	1	0	0	60	180
0	x_6	55	1	0	0	0	0	1	0	55	∞
0	x_7	65	0	1	0	0	0	0	1	∞	65
$F_j - c_j$		0	-45	-36	0	0	0	0	0	2475	2340

max ST – 1

C			45	36	0	0	0	0	0	b_j / a_{i2}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	
0	x_3	11250	0	450	1	0	0	-450	0	25
0	x_4	31500	0	780	0	1	0	-420	0	40.385
0	x_5	1350	0	90	0	0	1	-270	0	15
45	x_1	55	1	0	0	0	0	1	0	∞
0	x_7	65	0	1	0	0	0	0	1	65
$F_j - c_j$		2475	0	-36	0	0	0	45	0	540

max ST – 2

C			45	36	0	0	0	0	0
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
0	x_6	5	0	0	0.001	0	-0.006	1	0
0	x_4	10200	0	0	-2.133	1	2	0	0
36	x_2	30	0	1	-0.003	0	-0.006	0	0
45	x_1	50	1	0	-0.001	0	0.006	0	0
0	x_7	35	0	0	-0.003	0	0.006	0	1
$F_j - c_j$		3330	0	0	0.07	0	0.05	0	0

$$X^* = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 0 & 10200 & 0 & 5 & 35 \end{bmatrix}^T, \quad F_{\max} = 3330$$

2.4.2. Simplex – max : veštačka baza

U slučaju da su u ograničenjima prisutne jednačine, dopunske promenljive nisu potrebne, ali isto ne postoje ni realne promenljive čiji bi koeficijenti formirali jediničnu matricu dimenzije m x m. Da bi se ovaj problem prevazišao, svakom ograničenju se dodaje po jedna veštačka *promenljiva.* Za razliku od dopunskih promenljivih, veštačke promenljive nemaju svoje niti fizičko, niti ekonomsko značenje. Kako se oni dodaju i ograničenjima i funkciji cilja (sa znakom –M, pri čemu je M proizvoljno veliki pozitivni broj), one remete ravnotežu, te ne mogu ostati u optimalnom rešenju. Pošto se radi o traženju maksimuma, sve veštačke promenljive moraju napustiti bazu.

2.4.2.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1:

U jednom pogonu se proizvode artikli P1, P2 i P3 na tri mašine M1, M2 i M3. Raspoloživi vremenski kapaciteti mašina u razmatranom periodu su respektivno: 1000 nč, 2500 nč i 400 nč. Na mašini M1 se obradjuje P1, i to 1 nč i P3 u trajanju od 2 nč. Na mašini M2 se obradjuje P1 u trajanju od 2 nč, P2 u trajanju od 2 nč i P3 proizvod u trajanju od 1 nč. Na mašini M3 se obradjuje P2 u trajanju od 1 nč. Dobit od proizvodnje P1, P2 i P3 su 3000 din/kom, 2000 din/kom i 1000 din/kom respektivno.

Zadatak je naći proizvodni program koji će omogućiti maksimalni profit, uz uslov potpunog iskorišćenja raspoloživih kapaciteta mašina.

Rešenje:

Zadatak se može predstaviti sledećom tabelom:

Mašine / Proizvodi	M_1	M_2	M_3	Jedinična dobit (din/kom)
P_1	1	2	/	3000
P_2	/	2	1	2000
P_3	2	1	/	1000
Kapacitet (n.č)	1000	2500	400	-

Matematički model:

$$\max F(X) = 3000 \bullet x_1 + 2000 \bullet x_2 + 1000 \bullet x_3$$

$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 1000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 2500$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Uvodjenjem veštačkih promenljivih, matematički model dobija sledeći izgled:

$$\max F(X) = 3000 \bullet x_1 + 2000 \bullet x_2 + 1000 \bullet x_3 - M(x_4 + x_5 + x_6)$$

....

$$1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + x_4 = 1000$$

$$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + x_5 = 2500$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + x_6 = 400$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problem se rešava Simplex – max metodom, kao što je prikazano kroz Simplex tabele ST0 do ST3.

ST0

C			3000	2000	1000	-M	-M	-M	θ
Cb	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
-M	x_4	1000	1	0	2	1	0	0	1000 →
-M	x_5	2500	2	2	1	0	1	0	1250
-M	x_6	400	0	1	0	0	0	1	∝
F_j-c_j		-3900M	-3M-3000 ↑	-3M-2000	-3M - 1000	0	0	0	

ST1

C			3000	2000	1000	-M	-M	-M	θ
Cb	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3000	x_1	1000	1	0	2	1	0	0	∝
-M	x_5	500	0	2	-3	-2	1	0	250 →
-M	x_6	400	0	1	0	0	0	1	400
F_j-c_j		$3*10^6$ - 900M	0	-3M-2000 ↑	3M + 5000	3M + 5000	0	0	

ST2

C			3000	2000	1000	-M	-M	-M	θ
Cb	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3000	x_1	1000	1	0	2	1	0	0	500
2000	x_2	250	0	1	-3/2	-1	1/2	0	-
-M	x_6	150	0	0	3/2	1	-1/2	1	100 →
F_j-c_j		$3.5*10^6$ -150M	0	0	-3/2M + 2000 ↑	1000	3/2M+ 1000	0	

ST3

C			3000	2000	1000	-M	-M	-M	θ
Cb	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
3000	x_1	800	1	0	0	-1/3	2/3	-4/3	
2000	x_2	400	0	1	0	0	0	1	
1000	x_3	100	0	0	1	2/3	-1/3	2/3	
F_j-c_j		$3.3*10^6$	0	0	0	-1000/3 + M	1000/3 +M	4000/3 + M	

Rešenje u ST3 je optimalno pošto su svi članovi reda $F_j - c_j >= 0$.

Optimalni proizvodni program je definisan vektor kolonom promenljive:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 400 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Ovakav proizvodni program garantuje maksimalni profit u uslovima zadatim ograničenjima, koji iznosi:

$$\max F(X) = F(X^*) = 3.3 \bullet 10^6 \, din$$

2.4.3. Iznalaženje minimalne vrednosti F(x) – *simplex - min*

Standardni oblik simplex - min modela je dat na sledeći način:

Funkcija cilja (kriterijuma) je :

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 * x_1 + ...+ c_n * x_n$$

Sistem nejednačina ograničenja je:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$...$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m$$

Ovaj sistem nejednačina se prevodi u sistem jednačina, uvodjenjem dopunskih promenljivih, posle čega se dobija:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m
\end{aligned}
$$

Pošto dopunske promenljive imaju znak – (koeficijent uz promenljive je –1), ne mogu se uzeti za početno bazično rešenje, odnosno, u model se moraju uvesti *veštačke promenljive*, tako da matematički model sada postaje:

- funkcija kriterijuma:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + 0(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) + M(x_{n+m+1} + \ldots. + x_{n+m+m}) \quad (23)$$

- ograničenja:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} + x_{n+m+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} + x_{n+m+2} = b_2 \\
&\ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} + x_{n+m+m} = b_m
\end{aligned}
\quad (24)
$$

Koeficijent M predstavlja proizvoljno veliki pozitivni broj. Sve što je ranije rečeno za model sa dopunskim promenljivim kod iznalaženja max F(x) važi i u ovom modelu. Funkcija F(x) ne može zauzeti minimalnu vrednost dok veštačke promenljive ne napuste bazu. Kriterijum za ulazak u bazu je $\max\limits_{j}(T_j - c_j)$, dok je kriterijum optimalnosti $T_j - c_j \leq 0$ za svako j. Primena simplex – min metode je prikazana kroz sledeće primere.

2.4.3.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1:

Fabrika namerava da proizvede novu leguru, koja se dobija mešanjem polufabrikata PF1 i PF2. Legura mora sadržati najmanje 40 jedinica legirajućeg elementa A, 60 jedinica legirajućeg elementa B i 40 jedinica legirajućeg elmenta C. Polufabrikati sadrže legirajuće elemente (jedinica/kg) kao što je dato u sledećoj tabeli.
Zadatak je pronaći najjeftiniju kombinaciju mešanja polufabrikata PF1 i PF2 koja zadovoljava date uslove, ako 1 kilogram polufabrikata PF1 košta 10 (n.j.) a polufabrikata PF2 košta 20 (n.j.).

Rešenje:

Podaci iz zadatka se mogu sistematizovati kroz sledeću tabelu:

Polufabrikat ⇒ Artikli ⇓	PF1	PF2	Najmanji sadržaj legirajućeg elementa (jedinice)
A	3	1	40
B	2	2	60
C	1	3	40
Cena polufabrikata (n.j/kg)	10	20	

Matematički model:

F-ja cilja:

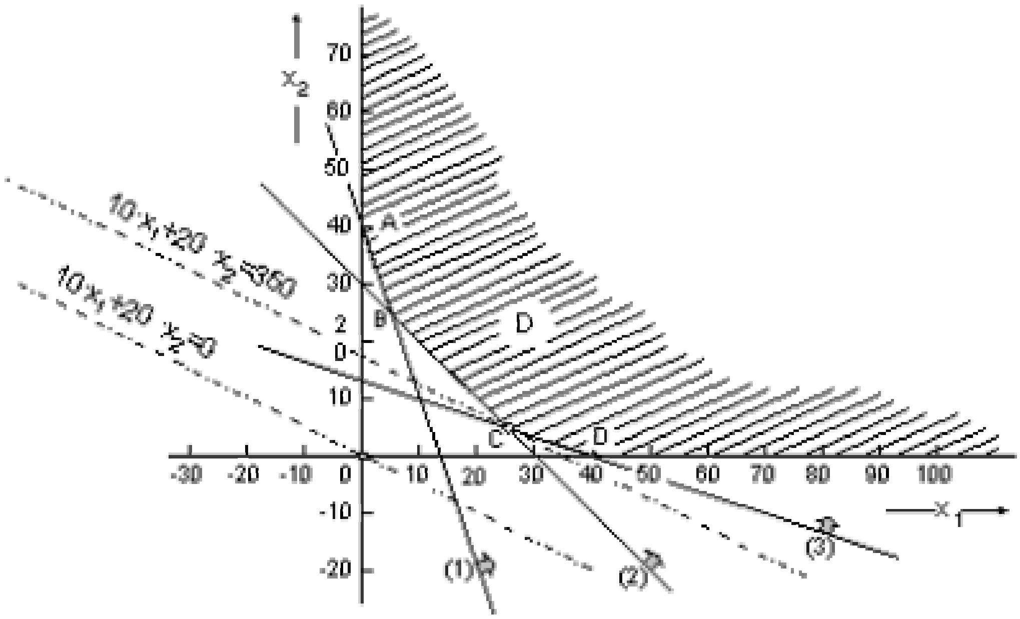
$$\min F(x) = 10 \bullet x_1 + 20 \bullet x_2$$

Ograničenja:

$$L1: 3x_1 + 2x_2 \geq 40$$
$$L2: 2x_1 + 2x_2 \geq 60$$
$$L3: x_1 + 3x_2 \geq 40$$

a) Grafička metoda

Grafičko rešenje je dato na slici 7.



Slika 7. Grafičko rešenje zadatka

Oblast dopustivih rešenja (D) je neograničena, a optimalno rešenje se nalazi u tački C.

Oprimalni vektor (rešenje) je:

$$X^* = X_C = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix} (kg)$$

Ovo znači, da tražena legura treba da sadrži 25 kg polufabrikata PF1 i 5 kg polufabrikata PF2.

Cena legure (u količini od 30 kg) bi sada iznosila:

$$\min F(x) = 10 \bullet x_1^* + 20x_2^* = 350\_(n.j./30\_kg\_legure)$$

b) Simplex – min metoda

Funkcija cilja:

$$F(x) = 10 \bullet x_1 + 20 \bullet x_2 - 0 \bullet (x_3 + x_4 + x_5) + M \bullet (x_6 + x_7 + x_8)$$

Ograničenja:

$$L1: 3x_1 + 2x_2 - 1x_3 - 0x_4 - 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 40$$
$$L2: 2x_1 + 2x_2 - 0x_3 - 1x_4 - 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 = 60$$
$$L3: x_1 + 3x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 = 40$$

Rezultati primene Simplex – min metode su prikazani u sledećim iteracionim tabelama.

min ST-0

C			10	20	0	0	0	M	M	M	$\theta_i = X_a / X_1$
Cb	Xb	X_a	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
M	x_6	40	3	1	-1	0	0	1	0	0	40/3
M	x_7	60	2	2	0	-1	0	0	1	0	30
M	x_8	40	1	3	0	0	0	0	0	1	40
$T_i - c_i$		140 M	6 M -10	6 M -20	-M	-M	-M	0	0	0	-

min ST-1

C			10	12	0	0	0	M	M	M	$\theta_i = X_a / X_2$
Cb	Xb	X_a	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
10	x_1	40/3	1	1/3	-1/3	0	0	3/8	0	0	40
M	x_7	100/3	0	4/3	2/3	-1	0	-1/2	1	0	25
M	x_8	80/3	0	8/3	1/3	0	-1	-1/8	0	1	10
$T_i - c_i$		60 M +100/3	0	4M -50/3	M -10/3	-M	-M	-2 M +10/3	0	0	-

min ST-2

C_i			10	12	0	0	0	M	M	M	$\theta_i = X_a / X_3$
Cb	Xb	X_a	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
10	x_1	40/3	1	0	-3/8	0	1/8	3/8	0	-1/8	-
M	x_7	100/3	0	0	1/2	-1	1/2	-1/2	1	-1/2	40
20	x_2	80/3	0	1	1/8	0	-3/8	-1/8	0	3/8	80
$T_i - c_i$		20 M +300	0	0	M/2 -5/4	-M	-M/2 -25/4	-3 M/2 +25/12	0	-3 M +25/12	-

min ST-3

C			10	12	0	0	0	M	M	M
Cb	Xb	X_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
10	x_1	25	1	0	0	3/4	1/2	0	3/4	-1/2
0	x_3	40	0	0	1	-2	1	-1	2	-1
20	x_2	5	0	0	0	1/4	-1/2	0	1/4	1/2
$T_i - c_i$		350	0	0	0	-5/2	-5	-M -5/6	-M +5/2	-M +5

Dobijeni rezultat je isti kao i kod grafičke metode, pri čemu je dobijeno kopletnije rešenje, kao:

$$X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*, x_7^*, x_8^*] = [25,\ 5,\ 40,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \text{ (kg)}$$

Kao što se vidi, rešenje problema tipa *simplex –min* je znatno složenije, pa se često ovakvi problemi prevode u takozvani *dualni model*.

2.5. Dualni model LP

U odredjenim slučajevima matematički model M osnovnog zadatka LP ne može da posluži za iznalaženje optimalnog plana primenom opisane simpleks metode u tačci 2.3. U ovakvim slučajevima se pribegava preformulaciji primarnog zadatka LP u **dualni zadatak,** pomoću koga je moguće naći traženo rešenje.

Izmedju primarnog i dualnog zadatka postoje sledeće korespodencije:

1. Dualni model ima onoliko promenljivih koliko primarni zadatak ograničenja, i ograničenja koliko primarni zadatak promenljivih;
2. Slobodni članovi u ograničenjima primarnog zadatka postaju koeficijenti uz promenljive funkcije kriterijuma (cilja) dualnog modela, a koeficijenti uz promenljive funkcije kriterijuma primarnog modela postaju slobodni članovi u ograničenjima dualnog modela;
3. Smer nejednačina dualnog modela je suprotan smeru nejednačina primarnog modela;
4. Ako je u primernom modelu tražen maksimum funkcije kriterijuma, u dualnom se traži minimum, i obrnuto;

5. Dopunskoj promenljivoj x_{n+1} primara koja je u optimalnom baznom rešenju odgovara promenljiva y_j u dualnom modelu, pri čemu je $x_{n+1} * y_j = 0, i = \overline{1,m}$
6. Realnoj promenljivoj x_j primara iz bazičnog dopustivog rešenja odgovara dopunska promenljiva y_{m+j} dualnog modela sa nultom vrednošću $x_j * y_{m+j} = 0, j = \overline{1,n}$
7. Matrica ograničenja u primarnom modelu jednaka je transponovanoj matrici ograničenja u dualnom modelu.

Neka je primarni model definisan funkciojom kriterijuma (cilja) i sistemom nejednačina ograničenja, kao što je dato jednačinama i/ili nejednačinama 3 i 4

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 * x_1 + ...+ c_n * x_n$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{aligned}$$

Dualni model je definisan funkcijom kriterijuma

$$\max F(Y) = \sum_{j=1}^{m} c_j y_j = b_1 * y_1 + ...+ b_m * y_m \qquad (23)$$

i sistemom nejednačina ograničenja

$$\begin{aligned} &a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ &\ldots \\ &a_{1n}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq c_n \end{aligned} \qquad (24)$$

Maksimum funkcije primarnog modela $F(X)$ je jednak minimumu funkcije dualnog modela $F(Y)$.

Pojašnjenje rada sa dualnim modelom se daje kroz sledeći primer.

2.5.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

Korišćenjem simpleks metode rešiti sledeći model LP:

Osnovni model:

Funkcija kriterijuma:

min $F(y) = 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4$

Skup ograničenja:

$$8y_1 + 5y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 400$$
$$2y_1 + y_2 + 6y_3 + 5y_4 \geq 250$$
$$5y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 \geq 220$$
$$6y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 5y_4 \geq 250$$
$$y_i \geq 0;..i = 1,...,4$$

Dualni model:

Funkcija kriterijuma:

max $F(x) = 400x_1 + 250x_2 + 220x_3 + 250x_4$

Skup ograničenja:

$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 2$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3$$
$$3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 4$$
$$1x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1$$

$$\max F(x) = 400x_1 + 250x_2 + 220x_3 + 250x_4 + 0 \bullet (x_5 + x_6 + x_7 + x_8)$$

$$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 2$$
$$5x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 0x_5 + 1x_6 + 0x_7 + 0x_8 = 3$$
$$3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 1x_7 + 0x_8 = 4$$
$$1x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 1x_8 = 1$$

max ST – 0

C			400	250	220	250	0	0	0	0	b_j / a_{i1}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
0	x_5	2	8	2	5	6	1	0	0	0	0.25
0	x_6	3	5	1	4	3	0	1	0	0	0.6
0	x_7	4	3	6	3	4	0	0	1	0	1.33
0	x_8	1	1	5	2	5	0	0	0	1	1
$F_j - c_j$		0	-400	-250	-220	-250	0	0	0	0	100

max ST – 1

C			400	250	220	250	0	0	0	0	b_j / a_{i2}
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	
400	x_1	0.25	1	0.25	0.625	0.75	0.125	0	0	0	1
0	x_6	1.75	0	-0.25	0.875	-0.75	-0.625	1	0	0	-7
0	x_7	3.25	0	5.25	1.125	1.75	-0.375	0	1	0	0.619
0	x_8	0.75	0	4.75	1.375	4.25	-0.125	0	0	1	0.1578
$F_j - c_j$		100	0	-150	30	50	50	0	0	0	23.68

max ST – 2

C			400	250	220	250	0	0	0	0
C_b	X_b	B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
400	x_1	0.21	1	0	0.55	0.5275	0.13	0	0	-0.05
0	x_6	1.789	0	0	0.947	-0.5275	-0.6315	1	0	0.05
0	x_7	2.422	0	0	-0.392	-2.92	-0.238	0	1	-1.1025
250	x_2	0.1578	0	1	0.289	0.89	-0.026	0	0	0.21
$F_j - c_j$		123.68	0	0	73.35	183.5	46.1	0	0	31.5

$$Y^* = [46.1 \quad 0 \quad 0 \quad 31.5 \quad 0 \quad 0 \quad 73.35 \quad 183.5]^T, \quad F_{\min} = 123.68$$

2.6. Rešavanje problema linearnog programiranja korišćenjem programskog paketa

2.6.1. Programskog paketa LINDO

LINDO (**Linear Interactive and Discrete Optimizer)** je interaktivni softverski paket razvijen od strane kompanije LINDO System. Inc, USA. Programski paket se može koristiti za rešavanje problema linearnog programiranja, u svim aplikacijama gde je potrebno rešavati problem optimizacije.

Elementi LINDO modela su:

1. Cilj – uvek u prvoj liniji LINDO modela, počinje izrazom min ili max.
2. Jedna ili više varijabli – nepoznate veličine koje treba odrediti da bi se ostvario cilj.
3. Jedno ili više ograničenja – postavljenih na varijablama. U LINDO modelima ograničnjima prethodi jedna od sledećih linija (naredbi): SUBJECT TO; SUCH THAT; S. T.; ST; Kraj ograničenja se označava sa END, što je obavezno samo u slučaju kada se koriste dodatne komande.

LINDO sintaksa

- Ime varijable je ograničeno na 8 karaktera.
- LINDO prepoznaje sledeće operatore: + plus, – minus, < manje, > veće, = jednako, <= manje ili jednako i >= veće ili jednako.
- Operacije se izvode s leva na desno.
- Komentari mogu biti bilo gde u modelu, a prethodi im znak uzvika.
- Ograničenja i funkcija cilja mogu biti u više linija.
- LINDO nije osetljiv na veličinu slova.
- Sa desne strane jednačine ograničenja mogu biti samo konstante.
- Sa leve strane ograničenja mogu biti samo promenljive i njihovi koeficijenti.

Osnovne komande menija

LINDO je programski paket koji radi pod WINDOWS operativnim sistemom, tako da je korisnički orjentisan (User Frendly), i korišćenje je znatno olakšano sa osnovnim poznavanjem rada u WINDOWS okruženju.

Osnovne komande iz menija:

File

Save	Snimanje ulaznih podataka (modela), izveštaja ili komandnog prozora. Format u kojem ih snimamo je *.LTX – LINDO tekstualni format.
Log Output	Ako je aktivna ova opcija, sve aktivnosti u aktivnom prozoru se snimaju u tekstualni fajl (dnevnik, log).
Take Commands	Za preuzimanje LINDO komandi iz drugih programa.
Basis Save	Snimanje rešenje aktivnog modela.
Basis Read	Čitanje rešenja modela, koje je bilo sačuvano korišćenjem Basis Save komande.
Title	Prikazuje ime aktivnog modela, ukoliko mu je bilo dodeljeno.
Date	Prikaz tekućeg datuma i vremena.
Elapsed Time	Vreme proteklo u tekućoj LINDO sesiji.

Edit

Options	Uvid i izmene raznih parametara korišćenih u LINDO sesiji.
Paste Symbol	Ispisivanje svih simbola koji se mogu koristiti u LINDO modelu.

Solve

Solve	Rešava aktivni model.
Debug	Omogućava nalaženje greške u modelu.

Reports

Solution	Omogućava odredjivanje izgleda rešenja.
Range	Daje analizu (intervale, za koje nadjeno optimalno rešenje ostaje nepromenjeno) parametara sa desne strane ograničenja i koeficijenata uz promenljive u funkciji cilja.
Parametrics	Daje rezultate promene vrednosti parametara sa desne strane ograničenja.
Statistics	Prikazuje ključnu statistiku za model u aktivnom prozoru.
Peruse	Pregled rešenja u željenom formatu (grafičkom ili tekstualnom, sa odabranim karakteristikama).
Picture	Prikaz aktivnog model u matričnoj formi.
Basis Picture	Prikaz vrsta i kolona poslednje matričnej transformacije Solver-a.
Tableau	Prikaz simpleks tabele aktivnog modela.
Formulation	Prikaz svih ili selektovanih delova modela.
Show Column	Prikaz selektovane kolone bez ostatka modela.

Window

Open Command Window	Otvara komandni prozor za unos LINDO komandi.
Open Status Window	Otvara prozor sa rešenjem, kao posle opcije Solve.

Help

U Help-u su dati veoma detaljno i pregledno uradjeni primeri . U daljem tekstu se daju dva rešena problema korišćenjem LINDO softvera.

2.6.1.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1: Proizvodnja kompjutera

```
!PROIZVODNJA KOMPJUTERA

! Kompanija proizvodi standardne i de luxe kompjutere.
! Naci maksimalni profit kompanije, ako je cena standardnog STD kom. 10 jedinica, a cena de luxe DLX 15 jedinica
! Ogranicenja:
! Kapacitet na dan je: do 10 kom/dan standardnih i do 12 kom/dan de luxe
! Radna snaga: Ima ukupno 16 radnika, ali je za skjlapanje STD potreban 1 radnik, a za sklapanje DLX 2 radnika.

MAX 10 STD + 15 DLX
SUBJECT TO
STD<=10
DLX<=12
STD+2 DLX<=16
END
```

Rešenje:

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)     145.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      STD        10.000000          0.000000
      DLX         3.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          2.500000
       3)         9.000000          0.000000
       4)         0.000000          7.500000

NO. ITERATIONS=       2
```

Primer 2: Odredjivanje broja radnika (preuzet iz Help-a)

Potrebno je odrediti broj radnika, koji će raditi odredjenim danima uz minimalne troškove. Ograničenja su sledeća:

- Svaki radnik treba da dobije 300$ nedeljno, ako radi radnim danima, 25$ više za rad subotom i 35$ za rad nedeljom.
- Svaki radnik je zaposlen 5 uzastopnih dana u nedelji, sa 2 dana odmora.
- Minimalne potrebe zapošljavanja po danima u nedelji su počevši od ponedeljka redom: 20, 13, 10, 12, 16, 18 i 20 radnika.

Rešenje

Dati problem je moguće predstaviti tabelom dole, u kojoj su:

- U koloni zaglavlja navedene promenljive pon, uto, sre,... koje označavaju broj radnika koji počinju sa radom u ponedeljak, utorak, sredu,... čiji je broj potrebno odrediti, tako da troškovi zapošljavanja budu minimalni.
- U vrsti zaglavlja dati mogući radni dani radnika.
- U preostalom delu, sa X su označeni radni dani za radnika koji počinje sa radom u ponedeljak, utorak,... Dati su svi mogući rasporedi radnih dana.
- U poslednjoj koloni date cene radnika koji počinje sa radom u ponedeljak, utorak,...

Raspored / Start	Ponedeljak	Utorak	Sreda	□etvrtak	Petak	Subota	Nedelja	Cena
pon	X	X	X	X	X			300
uto		X	X	X	X	X		325
sre			X	X	X	X	X	360
cet	X			X	X	X	X	360
pet	X	X			X	X	X	360
sub	X	X	X			X	X	360
ned	X	X	X	X			X	335

Funkcija cilja, čiji minimum treba odrediti ima oblik:

F (X) = 300 pon + 325 uto + 360 sre + 360 cet + 360 pet + 360 sub + 335 ned

Ograničenja o minimalnom broju zaposlenih radnika po danima su:

pon + cet + pet + sub + ned >= 20
pon + uto + pet + sub + ned >= 13
pon + uto + sre + sub + ned >= 10
pon + uto + sre + cet + ned >= 12
pon + uto + sre + cet + pet >= 16
uto + sre + cet + pet + sub >= 18
sre + cet + pet + sub + ned >= 20

Navedeni model se unosi u LINDO, gde on ima sledeći oblik (slika 8):

```
C:\WINSTON\LINDO\PRIMER.LTX
min 300 pon + 325 uto + 360 sre + 360 cet + 360 pet + 360 sub + 335 ned
st
pon + cet + pet + sub + ned >= 20
pon + uto + pet + sub + ned >= 13
pon + uto + sre + sub + ned >= 10
pon + uto + sre + cet + ned  >= 12
pon + uto + sre + cet + pet  >= 16
uto + sre + cet + pet + sub >= 18
sre + cet + pet + sub + ned >= 20
```

Slika 8. Izgled ekrana sa unešenim programom

Izborom opcije Solve – Solve, ili preko ikone Solve, dobija se rešenje (slika 9):

```
Reports Window

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP       8

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       7750.000

  VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       PON          2.000000          0.000000
       UTO          0.000000        100.000000
       SRE          2.000000          0.000000
       CET          7.000000          0.000000
       PET          5.000000          0.000000
       SUB          4.000000          0.000000
       NED          2.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000       -100.000000
        3)         0.000000          0.000000
        4)         0.000000       -100.000000
        5)         1.000000          0.000000
        6)         0.000000       -100.000000
        7)         0.000000        -25.000000
        8)         0.000000       -135.000000
```

Slika 9. Rešenje

U prvom redu se vidi da je nadjeno optimalno rešenje u osmom koraku, zatim da je vrednost funkcije cilja 7750, za vrednosti promenljivih (čija su imena navedena u koloni VARIABLE, a vrednosti u koloni VALUE):
pon = 2; uto = 0; sre = 2; cet = 7; pet = 5
sub = 4; ned = 2

U koloni SLACK OR SURPLUS su date vrednosti dopunskih promenljivih (LINDO koristi simplex algoritam rešavanja problema).
Kolona DUAL PRICES (dualne ili cene iz senke) nam govori o tome kako bi se uvodjenje resursa koji nisu u rešenju odrazilo na funkciju cilja, odnosno koliko treba da platimo da bi uveli dodatne resurse u rešenje. Ovo su ujedno i vrednosti promenljivih dualnog modela.

Primer 3: Odredjivanje optimalnog prizvodnog programa

Izvršiti optimizaciju proizvodnog programa, koji se sastoji od proizvoda P1 – P7, a u cilju maksimizacije dobiti preduzeća.

Proizvodnja se odvija na 5 mašina M1 do M5. U sledećoj tabeli su data normirana vremena trajanja operacija na pojedinim mašinama, kao i raspoloživi kapaciteti mašina u razmatranom periodu:

Proizvodi ⇒ Mašine ⇓	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Raspol. kapaciteti (min)
	Trajanje operacija (min/kom)							
M1	2	5	4	25	10	0	30	7000
M2	0	25	15	20	0	10	6	9800
M3	0	20	5	2	1	0	60	3000
M4	1	4	10	18	20	0	20	6200
M5	5	0	0	0	0	10	0	3000

Pored ograničenja u proizvodnim kapacitetima, postoje i tržišna ograničenja koja glase:

- tržištu se mora isporučiti tačno 1000 kom. svih proizvoda,
- količina proizvoda P5 i P7 (P5+P7) ne sme biti manja od 30 komada.

Dobiti koje je moguće ostvariti na tržištu po pojedinim proizvodima je data u tabeli:

Proizvod	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Dobit (din/kom)	17	26	16	30	17	30	10

Rešenje: Matematički model

Funkcija cilja:

MAX F(X)=17X1+26X2+16X3+30X4+17X5+30X6+10X7

Ograničenja prouzrokovana raspoloživim kapacitetima mašina:

2X1+5X2+4X3+25X4+10X5+30X7<=7000

25X2+15X3+20X4+10X6+6X7<=9800

20X2+5X3+2X4+X5+60X7<=3000

X1+4X2+10X3+18X4+20X5+20X7<=6200

5X1+10X6<=3000

Tržišna ograničenja

X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7=1000

X5+X7>=30

Izgled ekrana sa postavkom zadatka je dat na slici 10.

C:\WINSTON\LINDO\SAMPLES\OI_36.LTX

```
MAX  17 X1 + 26 X2 + 16 X3 + 30 X4 + 17 X5 + 30 X6 + 18 X7

SUBJECT TO

2 X1 + 5 X2 +  4 X3 + 25 X4 + 10 X5          + 30 X7  <= 7000
      25 X2 + 15 X3 + 20 X4         + 10 X6 +  6 X7  <= 9800
      20 X2 +  5 X3 +  2 X4    + X5          + 60 X7  <= 3000
  X1 + 4 X2 + 10 X3 + 18 X4 + 20 X5          + 20 X7  <= 6200
5 X1                                + 10 X6           <= 3000
  X1   + X2    + X3    + X4    + X5    + X6    + X7  = 1000
                                 X5            + X7  >= 30

END
```

Slika 10. Izgled ekrana sa postavkom zadatka

Rezultati proračuna su dati na slici 11.

Reports Window

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      20780.04

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1      504.517731           0.000000
       X2       96.123215           0.000000
       X3      134.766647           0.000000
       X4      186.851273           0.000000
       X5       30.000000           0.000000
       X6       47.741131           0.000000
       X7        0.000000          66.736153
```

Slika 11. Rezultati proračuna

Optimalni proizvodni program je:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \\ x_6^* \\ x_7^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504,52 \\ 96,12 \\ 134,77 \\ 186,85 \\ 30 \\ 47,74 \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 505 \\ 96 \\ 135 \\ 187 \\ 30 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix} \text{(kom)}.$$

Pimer 4: Odredjivanje optimalnog proizvodnog programa

Mlekara planira da lansira novi proizvodni program koji se sastoji od makrobiotičkog i voćnog jogurta. Ograničavajući faktori su tržište nabavke specijalnih sirovina i konzumna moć tržišta prodaje. Da bi jogurt dobio sertifikat, mora da sadrži specijalne aditive kao što je dato u sledećoj tabeli.

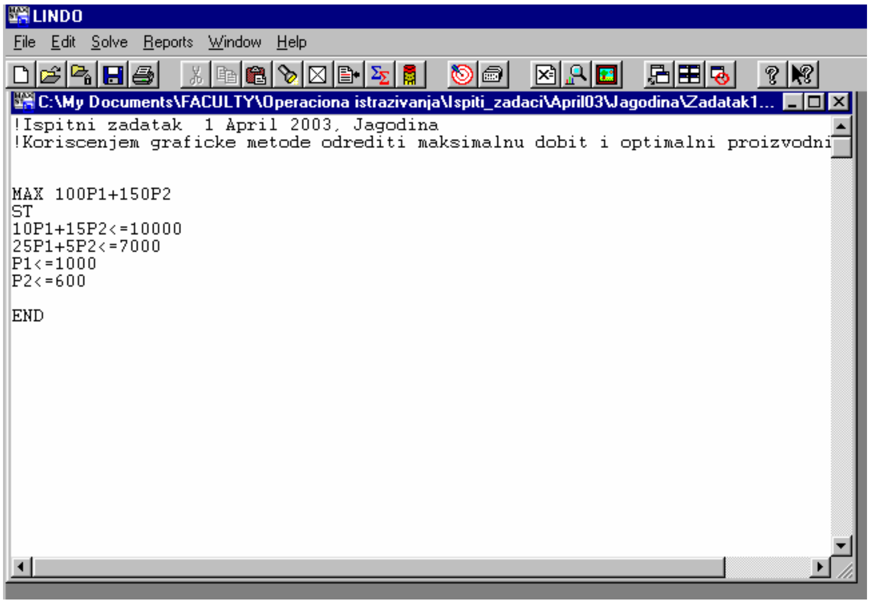
Proizvodi Sirovine	Tip I	Tip II	Raspoloživost sirovina na tržištu nabavke
S1 (gr/lit)	10	15	300 l/mes
S2(gr/lit)	25	5	210 l/mes

Tržite može da prihvati do 1000 l/dan proizvoda tipa I i do 600 l/dan proizvoda tipa II. Cena koja se može postići na tržištu je 100 din/l za tip I i 150 din/l za tip II.

U uslovima zadatim ograničenjima odrediti optimalni proizvodni program.

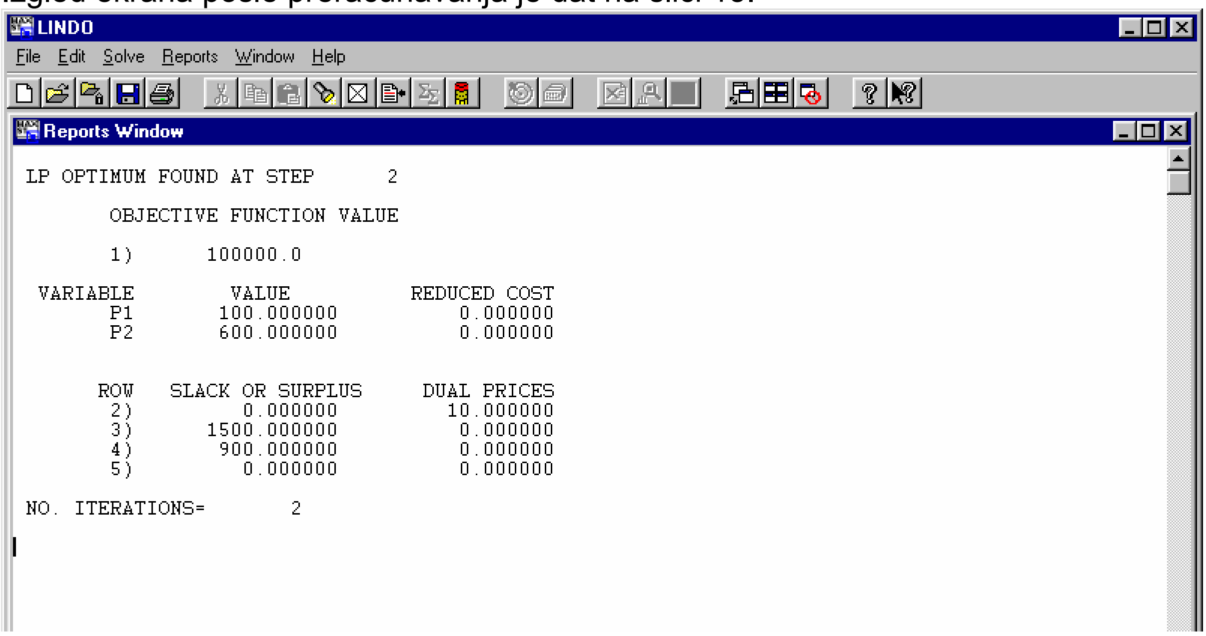
Rešenje:

Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom je dat na slici 12.



Slika 12. Izgled ekrana sa postavkom zadatka

Izgled ekrana posle preračunavanja je dat na slici 13.



Slika 13. Izgled ekrana sa rešenjem zadatka

U zadati uslovima u proizvodnji i na tržištu, optimalni proizvodni program je:

$$\left[X^*\right] = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 600 \end{bmatrix} \_(l/dan)$$

Ovakav proizvodni program garantuje maksimalni prihod od $F(X^*)$= 100.000 din/dan.

2.6.2. Programski paket LINDO WB 7

Programski paket LINDO WB 7 je takodje razvijen od strane kompanije LINDO System. Inc, USA, pri čemu koristi snažnu matematičku podršku EXCEL-a. Programski paket se može koristiti za rešavanje problema linearnog, celobrojnog i nelinearnog programiranja, kao i za postoptimalnu analizu po principu pitanja i odgovora „šta ako”. Korišćenje programskog paketa je ilustrovano kroz sledeći primer.

Primer 1.

Fabrika planira u narednom periodu proiyvodnju standardnih i de luxe računara. Profit koji se ostvaruje prodajom ovih računara je 300 USD/kom za standardne i 500 USD/kom za de luxe računare. Glavne komponente od kojih se montiraju računari i njihova raspoloživa količina u magacinu je data u sledećoj tabeli. Definisati optimalni proizvodni program, koji u datim uslovima obeybedjuje maksimalni profit.

	Zahtevane količine		Raspoložive količine u magacinu
	Standard	De luxe	
Standardno kućište	1	0	60
De luxe kućište	0	1	50
HDD	1	2	120

Matematički model problema:

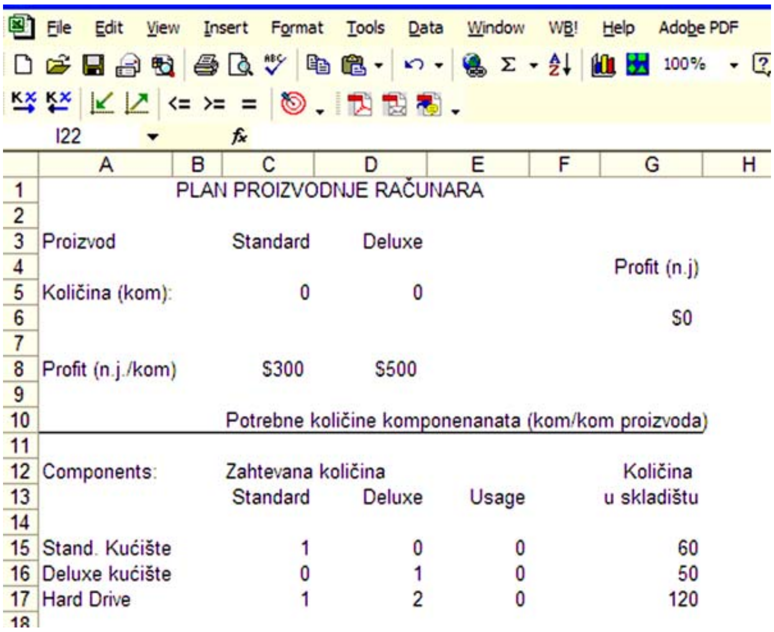
Fja cilja:

$$\max F(X) = 300 \bullet x_1 + 500 \bullet x_2$$

Ograničenja po raspoloživim količinama komponenata:

$$1 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 \leq 60$$
$$0 \bullet x_1 + 1 \bullet x_2 \leq 50$$
$$1 \bullet x_1 + 2 \bullet x_2 \leq 120$$

Unošenje podataka u LINDO WB 7 je prikazano na slici 14. Kao polazne veličine promenljivih (Standard računari – x_1 i De luxe – x_2) su unešene nulte vrednosti.

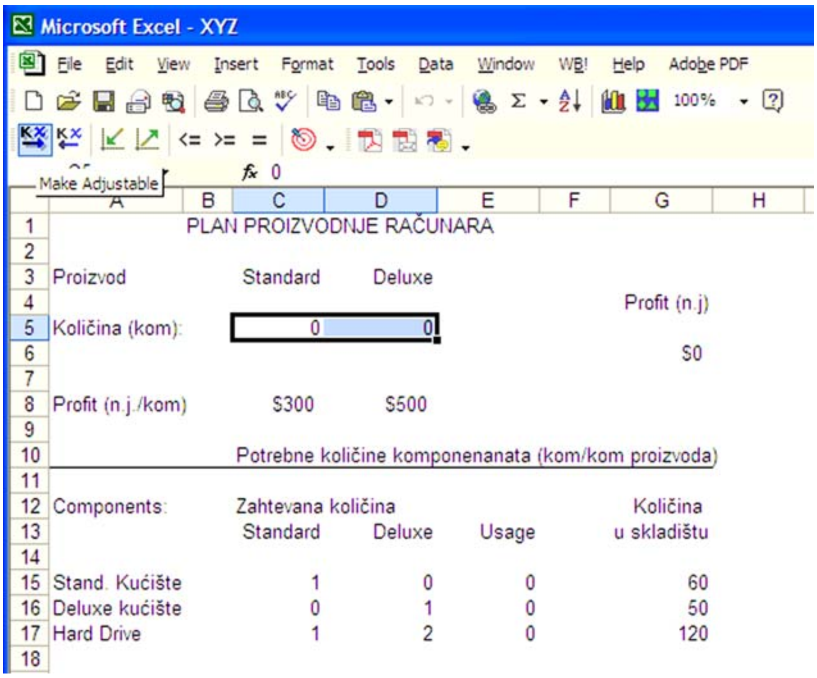


Slika 14. Unošenje podataka

Zadatak se rešava kroz sledeće korake.

Korak 1: Definisanje promenljivih

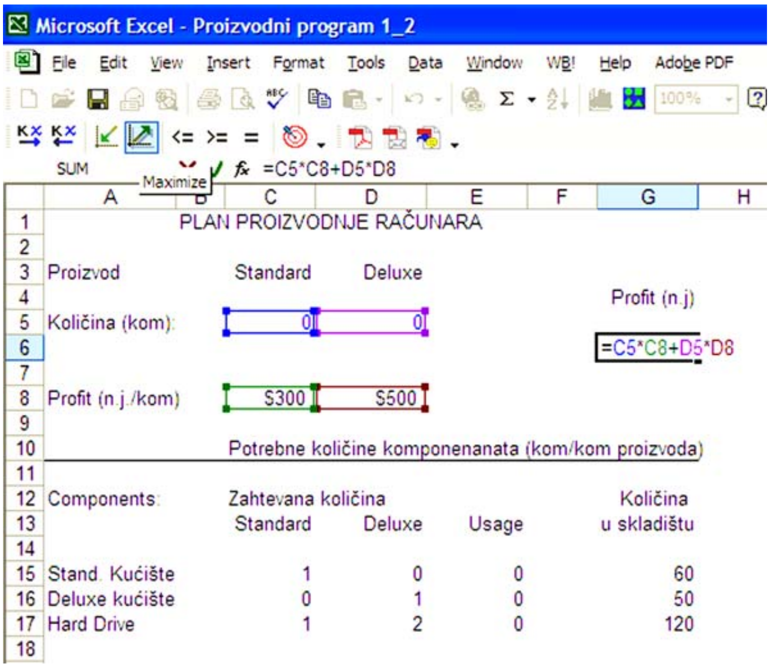
Programu se mora saopštiti u kojim ćelijama se nalaze promenljive, i to tako što se one označe i da komanda „Make adjustable", kao što je prikazano na slici 15.



Slika 15. Definisanje promenljivih

Korak 2. Definisanje funkcije cilja

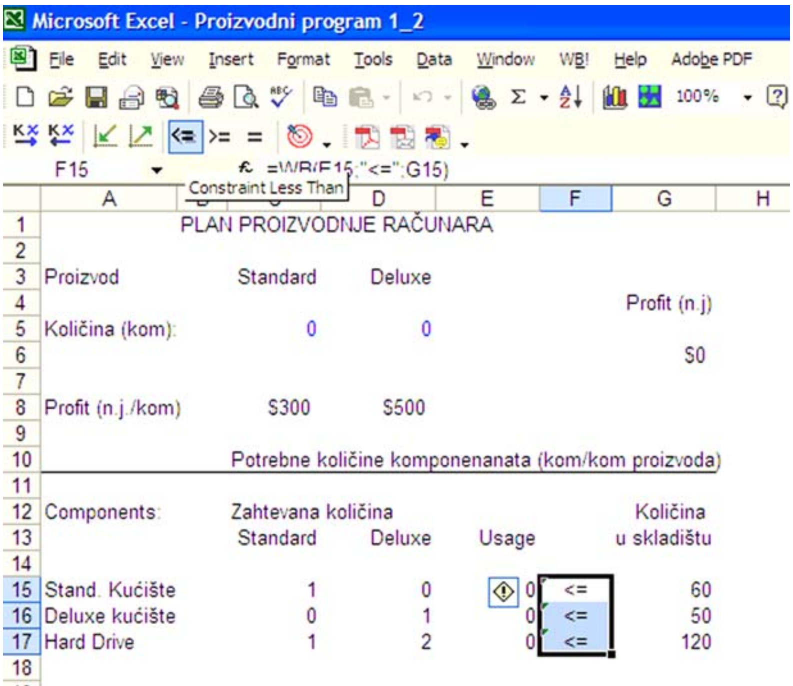
Bira se ćelija i u njoj se upisuje funkcija cilja. Programu se saopštava šta se traži, maksimum ili minimum, kao što je dato na slici 16.



Slika 16. Definisanje funkcije cilja

Korak 3. Definisanje ograničenja

Ograničenja se definišu, kako je prikazano na slici 17.

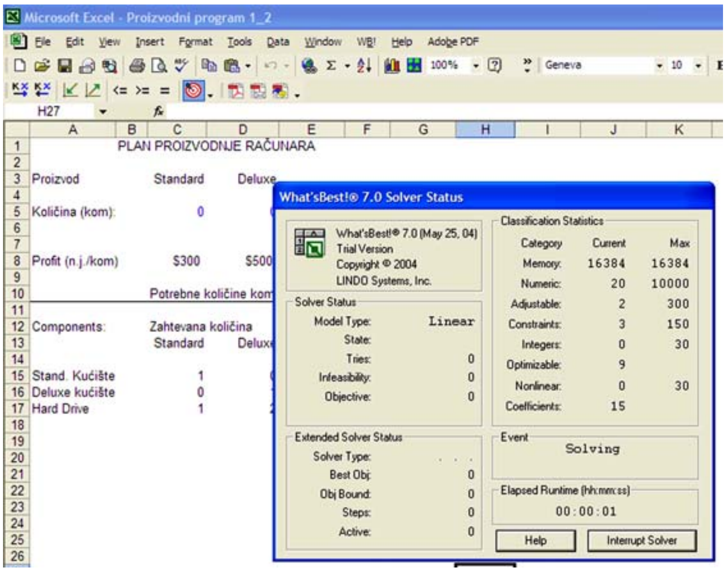


Slika 17. Definisanje ograničenja

Kroz prethodne korake, matematički model problema je definisan i unešen u računar.

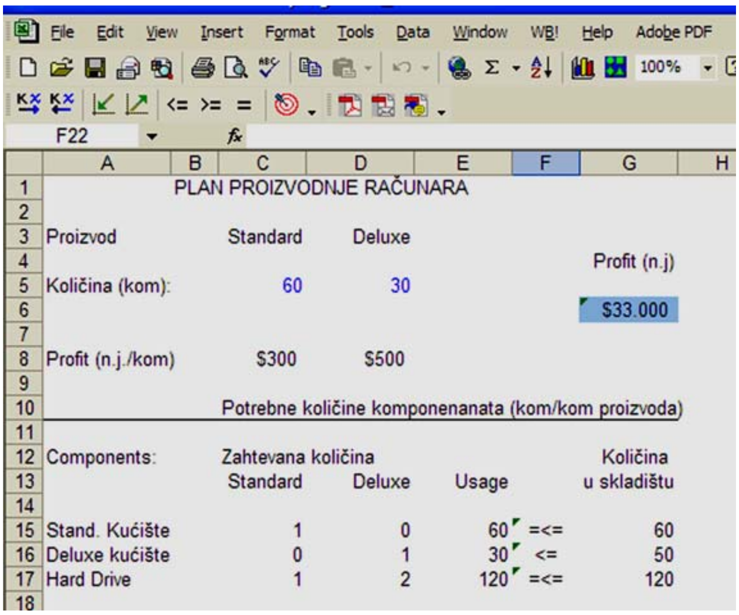
Korak 4. Rešavanje problema

Problem se rešava komandom „Solve”. Izgled ekrana sa osnovnim podacima o matematičkom modelu je dat na slici 18.



Slika 18. Rešavanje problema

Izgled ekrana sa rešenjem problema je dat na slici 19.



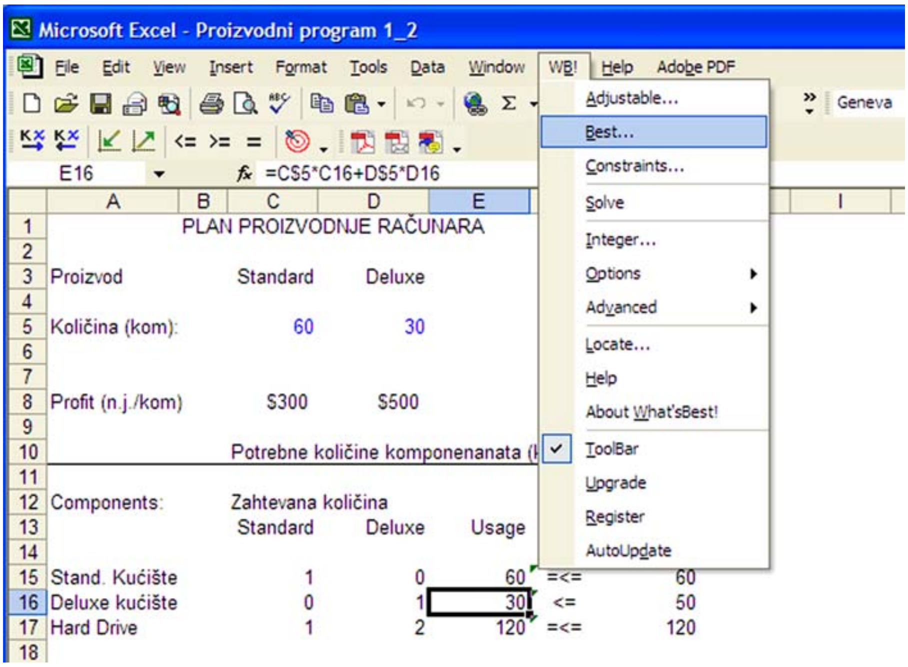
Slika 19. Rešenje problema

Kao što se vidi, rešenje problema je sledeće:

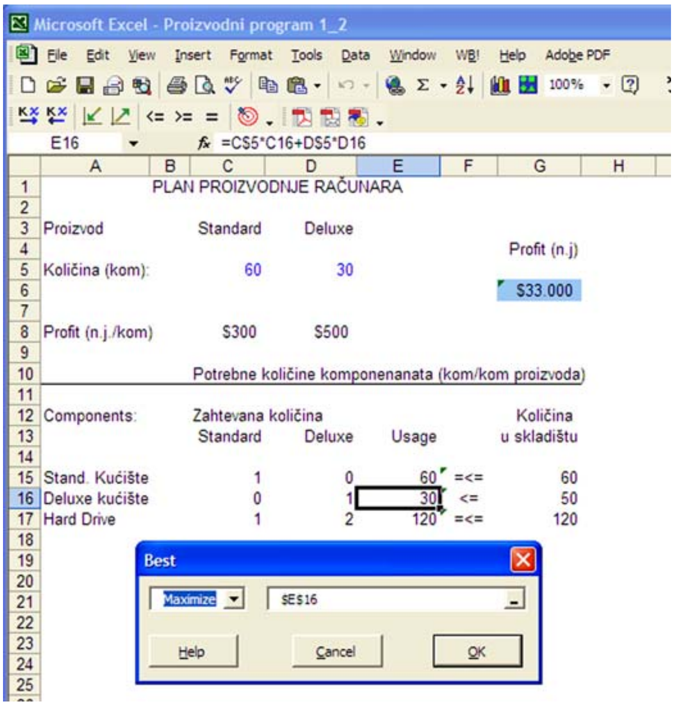
Optimalni proizvodni program u uslovima zadatih ograničenja je: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 30 \end{bmatrix}$

Funkcija cilja (maksimalni profit) je: $\max F(X) = 33.000..USD$

Iz rešenja se takodje može videti da sve količine iz skladišta neće biti utrošene, odnosno, da će u skladištu ostati 20 de luxe kućišta. Ako se ovo smatra nedopustivim, može se pristupiti parcijalnoj optimizaciji, odnosno poboljšanju iskorišćenja ovih kutija. Izabraće se ćelija koja definiše broj iskorišćenih de luxe kutija i dati komanda u ovom slučaju za nalaženje optimalnog proiyvodnog programa u slučaju maksimizacije vrednosti u ćeliji, kao što je dato na slikama 21 i 22.

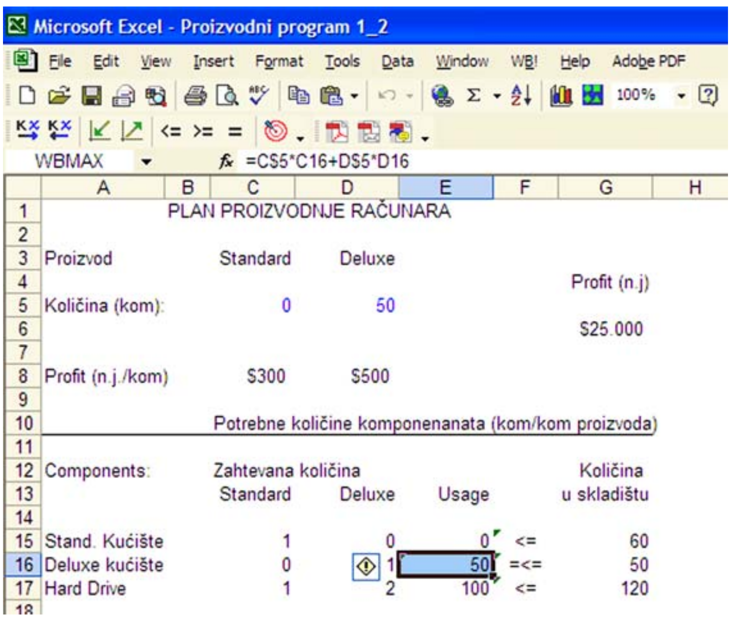


Slika 21. Delimična optimizacija utroška de luxe kutija – korak 1



Slika 22. Delimična optimizacija utroška de luxe kućišta – korak 2

Dobijeno rešenje je dato na slici 23. Vidi se da su sva kućišta de luxe iskorišćena, da je novi optimalni program $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}$ i da je funkcija cilja: $\max F(X) = 33.000..USD$



Slika 23. Rešenje problema posle delimične optimizacije utroška de luxe kućišta

Takodje je moguće zadati i ograničenja da profit ne bude manji od neke vrednosti i slično.

2.6.3. EXCEL – Solver

EXCEL kao moćan alat za matematička izračunavanja daje mogućnost rešavanja linearnog i nelinearnog programiranja, preko svoje funkcije Solver. Korišćenje programskog paketa je ilustrovano kroz sledeći primer.

Primer 1.

Fabrika proizvodi vratila V1 i V2 na strugovima S1 i S2. Potrebno (normirano vreme) izrade je: Za vratilo V1 na strugu S1 je 2.5 h i na strugu S2 je 3.5 h. Dnevna raspolozivost strugova je: Strug S1 – 15 h/dan, a strug S2 – 21 h/dan. Odrediti optimalni proizvodni program i količinu proizvedenih delova za naredni mesec (20 radnih dana) pod uslovom maksimalnog iskorišćenja mašina.

Strugovi / Vratila	Potrebno vreme (h/kom)		Vreme izrade (h)
	S1	S2	
V1	2,5	6	8,5
V2	5,5	3,5	9
Ras. Vreme (h/dan)	15	21	

Matematički model problema:

Fja cilja:

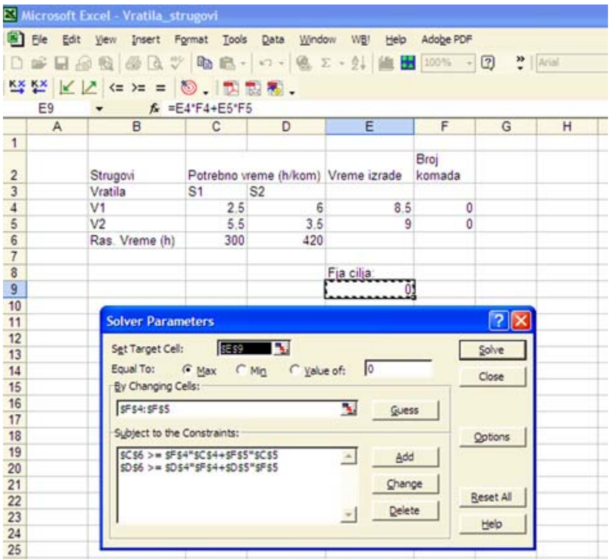
$$\max F(X) = 8{,}5 \bullet x_1 + 9 \bullet x_2$$

Ograničenja po kapacitetima:

$$2{,}5 \bullet x_1 + 5{,}5 \bullet x_2 \leq 15 \bullet 20$$

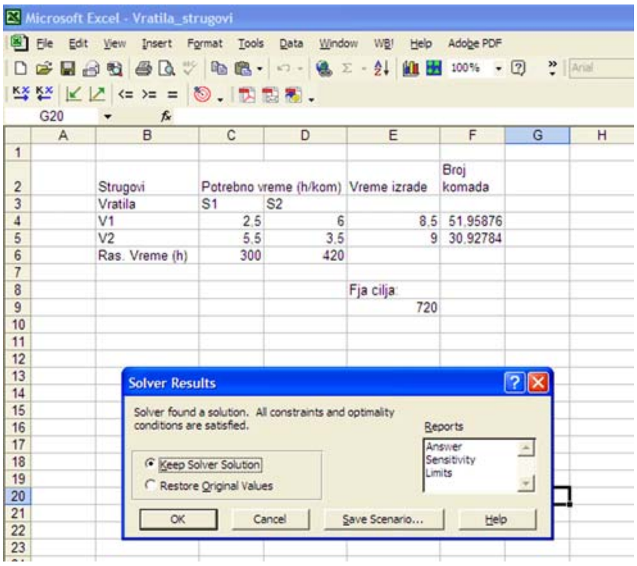
$$6 \bullet x_1 + 3{,}5 \bullet x_2 \leq 21 \bullet 20$$

Postavka zadatka u EXCEL-u je data na slci 24.

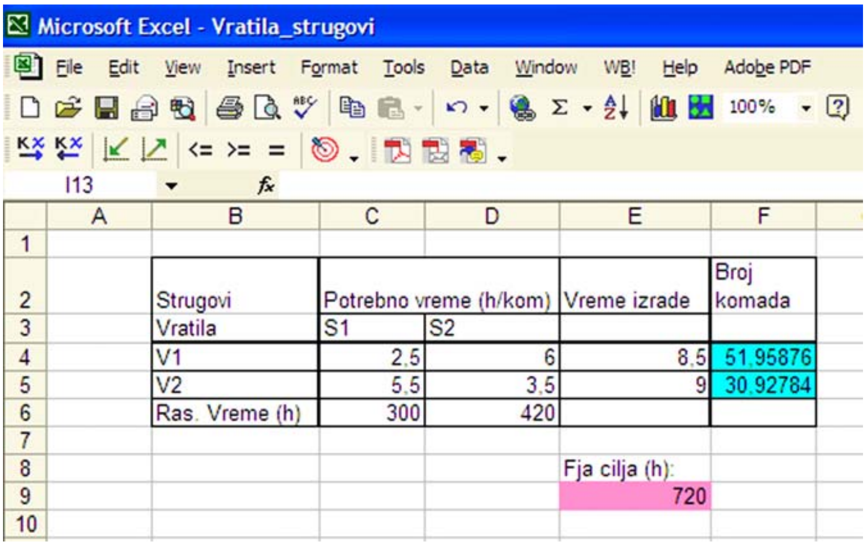


Slika 24. Postavka zadatka

Programu je potrebno definisati ćeliju koja predstavlja funkciju cilja, definisati šta se traži (minimum ili maximum) i uneti ograničenja. Posle zadavanje komande „Solve", dobija se rešenje, kao što je dato na slikama 25 i 26.



Slika 25. Rešenje zadatka – prvi korak



Slika 26. Rešenje zadatka – drugi korak

Kao što se može videti program nudi i standardni izveštaj (Answer Report) i izveštaj o osetljivosti optimalnog rešenja.

Izgled standardnog izveštaja je dat na slici 27.

Microsoft Excel 10.0 Answer Report
Worksheet: [Vratila_strugovi.xls]Sheet1
Report Created: 04/09/2004 19:08:00

Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
$E$9	Fja cilja:	0	720

Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
$F$4	V1 Broj komada	0	51,95876289
$F$5	V2 Broj komada	0	30,92783505

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
$C$6	Ras. Vreme (h) S1	300	$C$6>=$F$4*$C$4+$F$5*$C$5	Binding	0
$D$6	Ras. Vreme (h) S2	420	$D$6>=$D$4*$F$4+$D$5*$F$5	Binding	0

Slika 27. Standardni izveštaj

Solver je dao sledeće rešenje:

Optimalni proizvodni program u uslovima zadatih ograničenja je: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 52 \\ 31 \end{bmatrix}$

Funkcija cilja (maksimalno iskorišćenje mašina) je: $\max F(X) = 720..h$

2.7. Postoptimalna analiza (analiza osetljivosti)

Matematički model, ma koliko bio kompleksan, ne može uzeti sve uticajne faktore u obzir. Takodje, matematički model se pravi sa pretpostavkama vrednosti ulaznih veličina koje se mogu promeniti u budućnosti (povećanje ili smanjenje cena, plasmana, raspoloživih kapaciteta i slično. Bitno je ispitati kako sve ove promene utiču na valjanost matematičkog modela, odnosno, koliko je model osetljiv – senzitivan na ove promene.

Matematički model u vektorskom obliku, kako je ranije dat je:

F-ja cilja:

$$F(X) = C \bullet X = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_j & c_n \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_k \\ x_n \end{bmatrix} \tag{25}$$

Ograničenja:

$$A \bullet X \underset{\leq}{\overset{\geq}{}} B;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} \underset{\leq}{\overset{\geq}{}} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{bmatrix} \tag{26}$$

Promene podataka koji su unešeni u matematički model mogu biti:

- promena veke diskretne veličine u vektor – vrsti C, što najčešće znači promenu cene proizvoda;
- promena veke diskretne veličine u vektoru B, što znači promenu nekog od ograničenja;
- promena neke diskretne veličine u matrici A, što znači promenu u nekom zahtevu, normativu materijala, vremena ili slično.

Postoptimalnom analizom se zapravo ispituje u kojim granicama se diskretne veličine iz matematičkog modela mogu menjati, a da to ne dovede do promene optimalnog rešenja, odnosno optimalnog plana.

Analiza se može vršiti i u vektorskom obliku. Savremeni računarski programi već u sebi imaju opciju analize osetljivosti, koja daje odgovor u kojim granicama se mogu menjati pojedine veličine, a da dobijeno rešenje po matematičkom modelu ostane optimalno.

2.7.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1:

Tekstilno preduzeće proizvodi ženske kapute (Proizvod x_1), muška odela (proizvod x_2) i ženske komplete (proizvod x_3). Proizvodni proces se odvija na 4 mašine i to M1, M2, M3 i M4.

Raspoloživi kapaciteti na mašimana u toku jednog meseca su:

- mašina M1: 20 dana x 16 h-dnevno,
- mašina M2: 20 dana x 6 h/dnevno,
- mašina M3: 20 dana x 20 h/dnevno,
- mašina M4: 20 dana x 10.5 h/dnevno.

Za proizvodnju proizvoda je potrebno utrošiti:

Ženski kaput (proizvod x_1): 4 h na M1, 2 h na M2, 4h na M3 i 3h na M4

Muško odelo (proizvod x_2): 4 h na M1, 2 h na M2, 4h na M3 i 3h na M4

Ženski komplet (Proizvod x_3) 5 h na M1, 3 h na M2, 5h na M3 i 2h na M4

Za izradu ženskih kaputa, uvozi se krzno polarne lisice, koje je raspoloživo u količini za izradu 300 komada/mesec.

Ispitivanje tržišta, koje je uzelo u obzir savremeni dizajn proizvoda i dokazani renome firme je pokazalo da tržište ne predstavlja ograničenje, osim za ženske komplete, koje je moguće, u razmatranom periodu – mesecu plasirati najviše do 450 kompleta.

Dobit po jedinici proizvoda je: 1.300 n.j. za ženske kapute, 1.200 n.j. za muška odela i 1.100 n.j. za ženske komplete.

Uraditi:

a) Formulisati matematički model problema kojim se definiše optimalni proizvodni program (asortiman koji garantuje max. dobit),

b) Koristeći LINDO program naći optimalni proizvodni program,

c) Izvršiti analizu osetljivosti optimalnog rešenja.

Rešenje:

a) Matematički model problema

F-ja cilja:

MAX 1300X1+1200X2+1100X3

Ograničenja

4X1+4X2+5X3<=3200

2X1+2X2+3X3<=1200

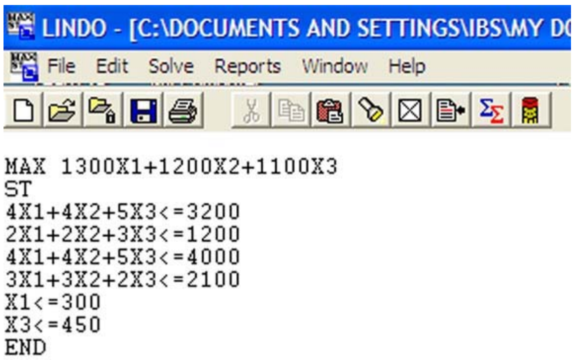
4X1+4X2+5X3<=4000

3X1+3X2+2X3<=2100

X1<=300

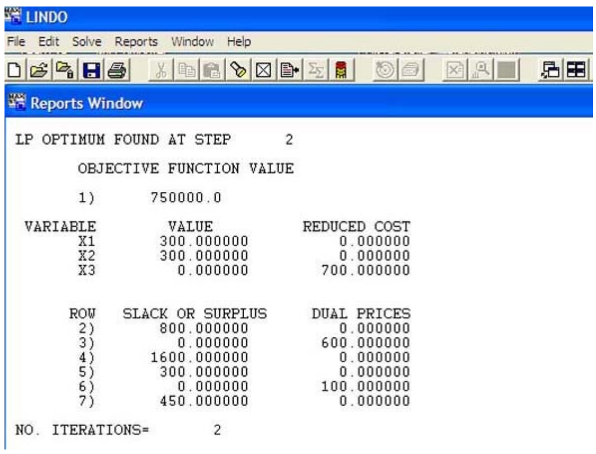
b) Optimalni proizvodni program

Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom je dat na slici 28.



Slika 28. Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom

Izgled ekrana sa rešenjem problema je dat na slici 29.



Slika 29. Izgled ekrana sa rešenjem problema

Kao što se može videti, maksimalna vrednost funkcije cilja, odnosno maksimalna dobit koju preduzeće može ostvariti u razmatranom mesecu je F_{max}= 750.000 n.j. Ova dobit će biti ostvarena ako se u razmatranom mesecu proizvede ženskih kaputa X1= 300 komada i muških odela X2=300 komada.

c) Analiza osetljivosti optimalnog rešenja.

Izgled ekrana posle izvršene analize osetljivosti je dat na slici 30.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	1300.000000	INFINITY	100.000000
X2	1200.000000	100.000000	466.666656
X3	1100.000000	700.000000	INFINITY

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	3200.000000	INFINITY	800.000000
3	1200.000000	200.000000	600.000000
4	4000.000000	INFINITY	1600.000000
5	2100.000000	INFINITY	300.000000
6	300.000000	300.000000	300.000000
7	450.000000	INFINITY	450.000000

Slika 30. Izgled ekrana posle izvršene analize osetljivosti

Program je našao dozvoljene promene vrednosti vektor vrste C (object coefficient ranges) i dozvoljene promene vrednosti diskretnih promenljivih vektora ograničenja B (Righthand Side Ranges).

- ✓ Sa slike se može videti u kojim granicama je dozvoljeno povećanje i smanjenje diskretnih promenljivih, pod uslovom da nadjeno rešenje (plan) ostane optimalan, pa se može videti, na primer:
- ✓ da se dobit po proizvodu X_1, odnosno koeficijent C_1 sme povećati beskonačno i smanjiti za najviše 100 n.j.,
- ✓ da se dobit po proizvodu X_2, odnosno koeficijent C_2 sme povećati za 100 n.j. i smanjiti za 466,666 n.j.,
- ✓ da se dobit po proizvodu X_3, odnosno koeficijent C_3 sme povećati za 700 n.j. i smanjiti beskonačno, odnosno do 0 (pošto je u nadjenom optimalnom rešenju X_3=0 komada,
- ✓ mesečni kapacitet (raspoloživost) mašine M1 se sme povećati beskonačno i smanjiti najviše za 800 h, itd.

Sve dok se diskretne promenljive matematičkog modela menjaju u ovim granicama, nadjeno rešenje ostaje optimalno.

2.8. Transportni problem LP

Izučavanje problema transporta primenom analitičkih metoda datira iz perioda pedesetih godina prošlog veka.

Razvojem metodologije LP pokazano je da su transportni problemi specijalan slučaj zadataka LP, bez obzira što su neki od njih ranije postavljeni i rešeni. Specifičnost transportnih problema kao zadataka LP ne ogleda se na funkciji cilja F(X) vec u skupu ograničenja L, gde se pojavljuju izvesna uprošćenja koeficijenata matrice [A] skupa ograničenja, koji se za razliku od drugih slučajeva, izražavaju u vrednostima nula ili jedan.

Analitičke metode transporta u najvećem broju slučajeva vezuju se za izbor najpovoljnije varijante transporta pri kojoj su troškovi minimalni u odnosu na odredjenu saobraćajnu mrežu i transportna sredstva. Danas to više nisu jedini zadaci koji se rešavaju kao transportni problemi. Sve češće se tome podvrgavaju i zadaci optimalnog razmeštaja mašina, postrojenja, pomoćnih službi, skladišta, servisa, energetskih objekata i drugog sa ciljem postizanja veće ekonomičnosti rada i vremena. Sve su to zadaci koji se svode na rešavanje različitih varijanti transportnog problema. Mnoga specifična pitanja ovog problema još uvek su prisutna u velikom broju naučnih rasprava i radova koji se bave praktičnom primenom analitičkih metoda kod rešavanja transportnih problema.

Transportni problem linearnog programiranja je problem minimizacije ukupnih troškova transporta: resursa, putnika, energije, informacije itd. U osnovnom modelu TP pretpostavka je da su poznati:

- količina resursa koje poseduju izvorišta (magacini, skladišta), a koji je po svojoj prirodi jednorodna (homogena),
- količina resursa koja je potrebna odredištima (ponori, primaoci, prodavnice i slično), koju je potrebno distribuirati, a koja je po svojoj prirodi takodje homogena,
- cene transporta po jedinici robe od odredjenog izvora do odredjenog odredišta.

U ovom kursu će biti razmatrani sledeći modeli transportnog problema:

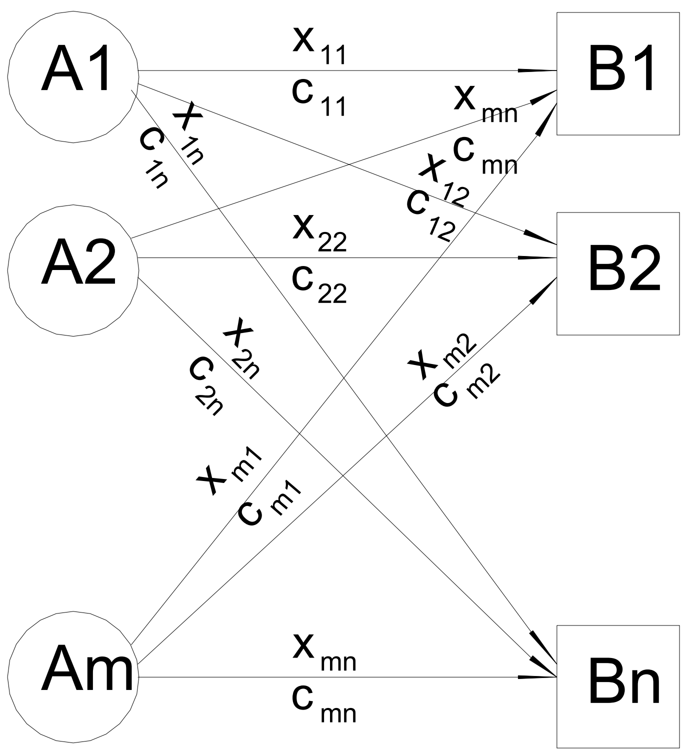
1. zatvoreni model transportnog problema,
2. otvoreni model transportnog problema ,
3. model rasporedjivanja (asignacije) izvršioca ili mašina za obavljanje odredjenih aktivnosti, i
4. model sa ograničenim propusnim moćima.

2.8.1. Zatvoreni model transportnog problema

Osnovni uslov koji zatvoreni model mora ispuniti je da su kapaciteti izvora jednaki kapacitetima ponora, odnosno da je:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{27}$$

Šematski, zatvoreni model transportnog problema se može prikazati kao na slici 31.



Slika 31. Šematski prikaz zatvorenog modela transportnog problema

Zadatak je odrediti takvu strategiju transporta robe da sva odredišta dobiju potrebne količine, a da troškovi transporta pri tome budu minimalni. Pomenuti podaci se mogu predstaviti tabelom 2.

Tabela 2. Tabelarna formulacija transportnog problema

Izvori \ Odredišta	B_1	...	B_n	Kapacitet izvora a_i
A_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Potrebe odredišta b_j	b_1	...	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

gde su: x_{ij} – količina resursa koji treba transportovati od A_i do B_j

c_{ij} – jedinična cena transporta od A_i do B_j

A_i – izvori

B_j – odredišta

a_i – kapacitet izvora

b_j – potrebe odredišta

Fukncija kriterijuma čiji minimum treba odrediti ima sledeći oblik:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{28}$$

Sistem ograničenja je:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= b_j \end{aligned} \tag{29}$$

Ukupan broj nepoznatih x_{ij} iznosi mn, dok je broj jednačina (m+n). Sumiranjem levih i desnih strana se dobijaju ukupni kapaciteti izvora i ponora:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} a_i \\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= \sum_{j=1}^{n} b_j \end{aligned} \tag{30}$$

Matematička formulacija postavljenog transportnog problema sastoji se u nalaženju minimuma funkcije cilja (29) pri skupu ograničenja (30), pri čemu nepoznate vrednosti koje se traže moraju biti nenegativne x_{ij}>=0, pošto se radi o fizičkim veličinama, odnosno o količinama transportovanog materijala.

Matematički model problema, prikazan preko funkcije cilja i ograničenja se može prikazati kao:

Funkcija cilja:

$$\begin{aligned}
&\min T(x) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots\ldots + c_{1n}x_{1n} + \\
&c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{2n}x_{2n} + \\
&. \\
&c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{mn}x_{mn}
\end{aligned} \qquad (31)$$

Ograničenja po redovima (kapaciteti izvora):

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + \ldots\ldots + x_{1n} = a_1 \\
&x_{21} + x_{22} + \ldots\ldots + x_{2n} = a_2 \\
&. \\
&. \\
&x_{m1} + x_{m2} + \ldots\ldots + x_{mn} = a_m
\end{aligned} \qquad (32)$$

Ograničenja po kolonama (kapaciteti ponora):

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + \ldots\ldots + x_{m1} = b_1 \\
&x_{12} + x_{22} + \ldots\ldots + x_{m2} = a_2 \\
&. \\
&. \\
&x_{1n} + x_{2n} + \ldots\ldots + x_{mn} = a_n
\end{aligned} \qquad (33)$$

Transportni problem predstavlja poseban slučaj problema LP, stim što se sa rešavanjem Simplex metodom polazai od nekog početnog rešenja, a ne iz koordinatnog početka.

2.8.1.1. Odredjivanje početnog rešenja

Za odredjivanje početnog rešenja moguće je primeniti jednu od sledećih metoda:

1. Dijagonalna metoda ili metoda severozapadnog ugla

Bazične promenljive – polja preko kojih se vrši transport rasporedjuju se duž dijagonale koja se kreće od gornjeg levog ugla (polje 11). Podmiruju se prvo odredišta do maksimalne količine koju može da primi, ili do pražnjenja prvog izvorišta. Dalje se postupak ponavlja za ostali deo matrice. Ilustracija metode je data na slici 32.

Pri ovome treba težiti da se dobije nedegenerisano rešenje, odnosno da se ispuni ravnoteža r=m+n-1 (r-broj bazno dopustivih rešenja, odnosno broj elemenata u završnoj tabeli; m- broj kolona matrice, n-broj redova matrice). Ovo pravilo važi za sve metode dobijanja polaznog rešenja.

Ponori / Izvor i	P_1 (90)	P_2 (145)	P_3 (60)	P_4 (125)
I_1 (175)	3 90	5	2	4
I_2 (110)	6	4	0	3
I_3 (135)	2	1	7	9

Ponori / Izvor i	P_1 (90)	P_2 (145)	P_3 (60)	P_4 (125)
I_1 (175)	3 90	5 85	2	4
I_2 (110)	6	4	0	3
I_3 (135)	2	1	7	9

Ponori / Izvor i	P_1 (90)	P_2 (145)	P_3 (60)	P_4 (125)
I_1 (175)	3 90	5 85	2	4
I_2 (110)	6	4 60	0	3
I_3 (135)	2	1	7	9

Ponori / Izvor i	P_1 (90)	P_2 (145)	P_3 (60)	P_4 (125)
I_1 (175)	3 90	5 85	2	4
I_2 (110)	6	4 60	0 50	3
I_3 (135)	2	1	7 10	9 125

Slika 32. Dijagonalna metoda odredjivanja početnog rešenja

2. Metoda minimalnih cena u redovima

Počinje se od prvog reda gde se uočava minimalna cena i u tom polju se postavlja maksimalna bazična vrednost, što se nastavlja i sa ostalim redovima.

3. Metoda minimalnih cena u kolonama

U analiziranoj prvoj koloni se postavlja bazni element na polje najmanjeg troška. Dalje se postupak ponavlja na 2, 3 . . n-tu kolonu. Metoda je ekvivalentna prethodnoj metodi minimalnih cena u redovima.

4. Metoda minimalnih cena u matrici

Bazni element x_{ij} se postavlja tamo gde sutroškovi c_{ij} najmanji i lociraju se maksimalne količine jedinica koje se transportuju, vodeći računa o konzistenciji.

2.8.1.2. Odredjivanje optimalnog rešenja zatvorenog transportnog modela metodom Mo-Di

Metodu Mo-Di je takodje razvio Danzing na osnovu simpleks metode LP, pa se ponegde metoda zove metoda simpleks množitelja. ili koeficijenata „u-v". Funkcija cilja (kriterijuma) je modifikovana i u nju su uvršteni simpleks množitelji. Modifikovana funkcija se može napisatim kao:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}u_i - v_j) \bullet x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij} \bullet x_{ij} \qquad (34)$$

U funkciju kriterijuma uveden je diferencijal:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad (35)$$

Kod nedegenerisanog baznog (početnog) rešenja broj baz̆ičnih elemenata je r = m+n-1, dok je broj koeficijenata za jedan veći i iznosi m+n. Da bi se sistem jednačina rešio, jedan od koeficijenata se izjednačuje sa nulom, i to je obično onaj koji se najčešće pojavljuje u formiranim jednačinama baz̆ičnih cena.

Ukupni troškovi transporta se sada mogu napisati:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j) \bullet x_{ij} \qquad (36)$$

Ako se početno nedegenerisano rešenje preformuliše, neka polja će ostati ista, neka će se promeniti. U nekim poljima gde je $x_{ij} = 0$ formiraće se nove vrednosti $\hat{x}_{ij}$. Za ona polja gde se vrednosti $x_{ij}.i.\hat{x}_{ij}$ poklapaju važeće i dalje relacija $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \ = 0; .c_{ij} = u_i + v_j$ što se direktno odražava na troškove, kao:

$$T(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j) \bullet \hat{x}_{ij} > T(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(u_i + v_j) \bullet x_{ij} \qquad (37)$$

Promenama u optimalnom programu, troškovi se uvek uvećavaju, ili posmatrano obrnuto, lošiji plan se uvek može poboljšati dovodjenjem diferencijala na iznos veći od nule, kao:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j > 0 \qquad (38)$$

Algoritam rada koji će biti primenjen kroz sledeće primere se sastoji u:

- Proveriti da li je broj baznih elemenata $r = m + n - 1$, tj. da li je početno rešenje nedegenerisano.
- U slučaju da $r < m + n - 1$, jedno od nebaznih polja mora postati bazno, odnosno, preko njega će se transportovati proizvoljno mala količina robe ($\varepsilon > 0$). Kriterijumi za odredjivanje nebaznog polja koje se prevodi u bazno su:
  - najniža jedinična cena transporta,
  - polje treba da omogući formiranje nedostajuće jednačine (što će biti objašnjeno kroz primere),
- Ispisati jednačine baznih cena prema formuli $c_{ij} = u_i + v_j$ i odrediti potencijale u_i i v_j,
- Odrediti diferencijale $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ za nebazna polja,
- Ako je zadovoljen uslov $\Delta_{ij} \geq 0$ u pitanju je optimalno rešenje,
- Ako ima vrednosti $\Delta_{ij} < 0$, na datom nebazičnon polju, povećati količinu resursa za transport, što je moguće više i ponoviti postupak.

2.8.1.3. Primeri rešenih zadataka

Primer 1:

Kompanija poseduje magacine u mestima I_1, I_2 i I_3 sa 150, 80 i 70 tona resursa. Iz magacina resursi se isporučuju potrošačkim centrima P_1, P_2, P_3 i P_4 čije su potrebe: 40, 90, 60 i 110 tona resursa. Potrebno je rešiti transportni problem uzimajući u obzir početno bazno dopustivo rešenje i kriterijum minimalnih troškova transporta. Jedinični troškovi transporta i početno nedegenerisano rešenje, koje je odredjeno metodom minimalnih cena u kolonama je dato u sledećoj tabeli:

Potrošački centri / Industrijski kombinati	P_1 (40)	P_2 (90)	P_3 (60)	P_4 (110)
I_1 (150)	75	35 40 $^{+\theta}$	50	8 110 $^{-\theta}$
I_2 (80)	40	80 20 $^{-\theta}$	25 60	15 $^{+\theta}$
I_3 (70)	15 40	60 30	90	5

Rešenje:

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ =300, radi se o zatvorenom modelu transportnog problema.

Početno bazno rešenje je nedegenerisano, odnosno, broj baznih polja je: r=3+4-1=6.

Početni troškovi transporta su:

$$F(X_0) = 35\cdot 40 + 8\cdot 110 + 80\cdot 20 + 25\cdot 60 + 15\cdot 40 + 60\cdot 30 = 7780$$

Za bazna polja se računa: $c_{ij} = u_i + v_j$;

Za nebazna polja se računa: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{12} = u_1 + v_2 = 35 \Rightarrow u_1 = 35$ $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 75 - 35 + 45 = 85$

$c_{14} = u_1 + v_4 = 8 \Rightarrow v_4 = -27$ $\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 50 - 35 + 55 = 70$

$c_{22} = u_2 + v_2 = 80 \Rightarrow u_2 = 80$ $\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 40 - 80 + 45 = 5$

$c_{23} = u_2 + v_3 = 25 \Rightarrow v_3 = -55$ $\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 15 - 80 + 27 = -38$

$c_{31} = u_3 + v_1 = 15 \Rightarrow u_3 = 60$ $\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 90 - 60 + 55 = 85$

$c_{32} = u_3 + v_2 = 60 \Rightarrow v_1 = -45$ $\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 5 - 60 + 27 = -28$

Potencijalu (u proračunu za bazna polja) koji se najčešće javlja dodeljuje se vrednost bliska nuli, tj: $v_2 = 0$, na osnovu čega se odredjujemo vrednosti ostalih potencijala. Iz prethodnog se vidi da svi diferencijali nisu nenegativni, odnosno, da se može postići poboljšanje početnog rešenja ako se deo transporta usmeri preko polja 2 – 4 i 3 – 4, pri čemu je potencijalnost polja 2 – 4 veća, odnosno, diferencijal Δ_{24} ima veću negativnu vrednost. Na polje 2- 4 se stavlja neka vrednost transportovane veličine θ, pri čemu se ravnoteža po redovima i kolonama mora zadržati, odnosno, mora se zatvoriti ciklus, kako što je prikazano na slici.

Pretpostavljena količina robe θ se odredjuje kao minimalna vrednost:

$$\begin{array}{l} 110-\theta=0 \\ 20-\theta=0 \end{array} \Rightarrow \quad \theta=20$$

Obzirom na to da dobijeno rešenje nije optimalno, postupak se ponavlja za novo i svako sledeće rešenje, dok se ne dobije optimalno.

Potrošački centri / Industrijski kombinati	P_1 (40)	P_2 (90)	P_3 (60)	P_4 (110)
I_1 (150)	75	35 60 $+\theta$	50	8 90 $-\theta$
I_2 (80)	40	80	25 60	15 20
I_3 (70)	15 40	60 30 $-\theta$	90	5 $+\theta$

$$F(X_1)=35\cdot 60+8\cdot 90+25\cdot 60+15\cdot 20+15\cdot 40+60\cdot 30=6480$$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 35$ => $v_2 = 35$ $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 75 - 0 + 10 = 85$
$c_{14} = u_1 + v_4 = 8$ => $v_4 = 8$ $\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 50 - 0 - 18 = 32$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 25$ => $u_2 = 7$ $\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 40 - 7 + 10 = 43$
$c_{24} = u_2 + v_4 = 15$ => $v_3 = 18$ $\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 80 - 7 - 35 = 38$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 15$ => $u_3 = 25$ $\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 90 - 25 - 18 = 47$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 60$ => $v_1 = -10$ $\Delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 5 - 25 - 8 = -28 \Rightarrow \theta = 30$
$u_1 = 0$

Potrošački centri / Industrijski kombinati	P_1 (40)	P_2 (90)	P_3 (60)	P_4 (110)
I_1 (150)	75	35 90	50	8 60
I_2 (80)	40	80	25 60	15 20
I_3 (70)	15 40	60	90	5 30

$$F(X_2) = 35 \cdot 90 + 8 \cdot 60 + 25 \cdot 60 + 15 \cdot 20 + 15 \cdot 40 + 5 \cdot 30 = 6180$$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 35$ => $u_1 = 8$ $\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 75 - 8 - 10 = 57$
$c_{14} = u_1 + v_4 = 8$ => $v_2 = 27$ $\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 50 - 8 - 10 = 32$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 25$ => $u_2 = 15$ $\Delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 40 - 15 - 10 = 15$
$c_{24} = u_2 + v_4 = 15$ => $v_3 = 10$ $\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 80 - 15 - 27 = 38$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 15$ => $u_3 = 5$ $\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 60 - 5 - 27 = 28$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 5$ => $v_1 = 10$ $\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 90 - 5 - 10 = 75$
$v_4 = 0$

Kako je svako $\Delta_{ij} \geq 0$, dobijeno rešenje je optimalno:

$$F(X_2) = F(X^*) = 6180 \qquad X^* = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 60 & 20 \\ 40 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

Primer 2

Rešititi transportni problem na optimalnom nivou prema šemi transporta i datom početnom rešenju. Pri tome utvrditi minimalne troškove transporta, optimalnu šemu transporta kao i uštede koje se postižu u odnosu na početno rešenje.

Odredišta / Skladišta	P1 (400)	P2 (250)	P3 (400)	P4 (250)
S1 (200)	4 200-θ	3 +θ	5	9
S2 (500)	2 **200+θ**	7	3 **300-θ**	10
S3 (350)	3	4 **250-θ**	8	6 **100+θ**
S4 (250)	6	12	5 **100+θ**	8 **150-θ**

Rešenje:

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ =1.300, radi se o zatvorenom modelu transportnog problema.

Početno bazno rešenje je nedegenerisano, odnosno, broj baznih polja je: r=4+4-1=7.

Početni troškovi transporta su:

$$F(X_0) = 4\cdot 200 + 2\cdot 200 + 3\cdot 300 + 4\cdot 250 + 6\cdot 100 + 5\cdot 100 + 8\cdot 150 = 5400$$

Za bazne elementi se računaju $c_{ij} = u_i + v_j$;

Za nebazne elemente se računaju $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$c_{11} = u_1 + v_1 = 4$	=>	$u_1 = 2$	$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 3 - 2 - 4 = -3$ => $\theta = 150$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2$	=>	$v_1 = 2$	$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 2 - 3 = 0$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3$	=>	$v_3 = 3$	$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 2 - 6 = 1$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4$	=>	$v_2 = 4$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 - 0 - 4 = 3$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6$	=>	$u_3 = 0$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 - 0 - 6 = 4$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$	=>	$u_4 = 2$	$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 0 - 2 = 1$
$c_{44} = u_4 + v_4 = 8$	=>	$v_4 = 6$	$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 0 - 3 = 5$
$u_2 = 0$			$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 2 - 2 = 2$
			$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 - 2 - 4 = 6$

Odredišta / Skladišta	P1 (400)	P2 (250)	P3 (400)	P4 (250)
S1 (200)	4 **50**-θ	3 **150**+θ	5	9
S2 (500)	2 **350**	7	3 **150**	10
S3 (350)	3 +θ	4 **100-**θ	8	6 **250**
S4 (250)	6	12	5 **250**	8

$$F(X_1) = 4950$$

$c_{11} = u_1 + v_1 = 4$	=>	$v_1 = 4$	$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 - 0 - 5 = 0$
$c_{12} = u_1 + v_2 = 3$	=>	$v_2 = 3$	$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 0 - 5 = 4$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2$	=>	$u_2 = -2$	$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 + 2 - 3 = 6$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3$	=>	$v_3 = 5$	$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 + 2 - 5 = 7$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4$	=>	$u_3 = 1$	$\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 3 - 1 - 4 = -2$ => $\theta = 50$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6$	=>	$v_4 = 5$	$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 1 - 5 = 2$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$	=>	$u_4 = 0$	$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 0 - 4 = 2$
$u_1 = 0$			$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 - 0 - 3 = 9$
			$\Delta_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 8 - 0 - 5 = 3$

Odredišta Skladišta	P1 (400)	P2 (250)	P3 (400)	P4 (250)
S1 (200)	4	3 **200**	5	9
S2 (500)	2 **350**	7	3 **150**	10
S3 (350)	3 **50**	4 **50**	8	6 **250**
S4 (250)	6	12	5 **250**	8

$$F(X_2) = 4850$$

$c_{12} = u_1 + v_2 = 3$ => $u_1 = -1$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 2$ => $u_2 = -1$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3$ => $v_3 = 4$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 3$ => $v_1 = 3$
$c_{32} = u_3 + v_2 = 4$ => $v_2 = 4$
$c_{34} = u_3 + v_4 = 6$ => $v_4 = 6$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$ => $u_4 = 1$
$u_3 = 0$

$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 4 + 1 - 3 = 2$
$\Delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 5 + 1 - 4 = 2$
$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 + 1 - 6 = 4$
$\Delta_{22} = c_{22} - u_2 - v_2 = 7 + 1 - 4 = 4$
$\Delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 10 + 1 - 6 = 5$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 8 - 0 - 4 = 4$
$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 6 - 1 - 3 = 2$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 12 - 1 - 4 = 7$
$\Delta_{44} = c_{44} - u_4 - v_4 = 8 - 1 - 6 = 1$

Kako je svako $\Delta_{ij} \geq 0$, dobijeno rešenje je optimalno:

$$F(X_2) = F(X^*) = 4850 \qquad X^* = \begin{bmatrix} 0 & 200 & 0 & 0 \\ 350 & 0 & 150 & 0 \\ 50 & 50 & 0 & 250 \\ 0 & 0 & 250 & 0 \end{bmatrix}$$

Ušteda u odnosu na početno rešenje je:

$$\Delta F(X) = F(X^*) - F(X_0) = 550$$

Primer 3: Rešenje transportnog problema (kao problema linearnog programiranja) uz pomoć programa LINDO

Kompanija koja proizvodi voćne sokove treba da iz svojih pogona P1 i P2 snabde svoje distributivne centre D1, D2 i D3. Kapaciteti pogona su: P1 = 1200 l/dan i P2 = 1800 l/dan.

Mogućnost plasmana u regijama koje pokrivaju distributivni centri su: D1= 840 l/dan, D2= 960 l/dan i D3= 1200 l/dan.

Voćni sokovi se transportuju u kartonskim kutijama, pri čemu jedna kutija sadrži 12 l soka. Jedinične cene transporta izmedju pogona za punjenje i distributivnih centara su: P1-D1: 3 din/kutiji, P1-D2: 5 din/kutiji, P1-D3: 10 din/kutiji, P2-D1: 1 din/kutiji, P2-D2: 2 din/kutiji P2-D3: 15 din/kutiji.

Matematički model problema je:

Fja cilja:

T(min)= 3X11+5X12+10X13+1X21+2X22+15X23

Ograničenja predstavljaju kapaciteti izvora i konzumna moć ponora i iznose:

X11+X12+X13=100

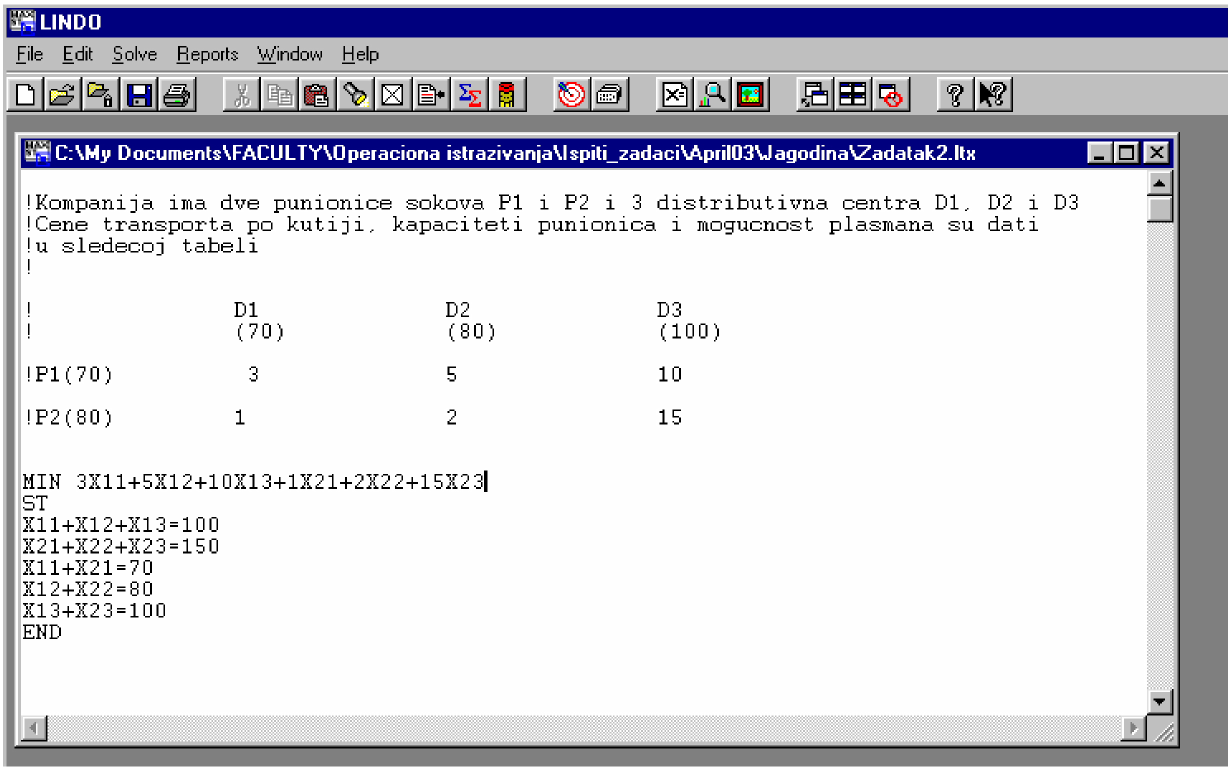
X21+X22+X23=150

X11+X21=70

X12+X22=80

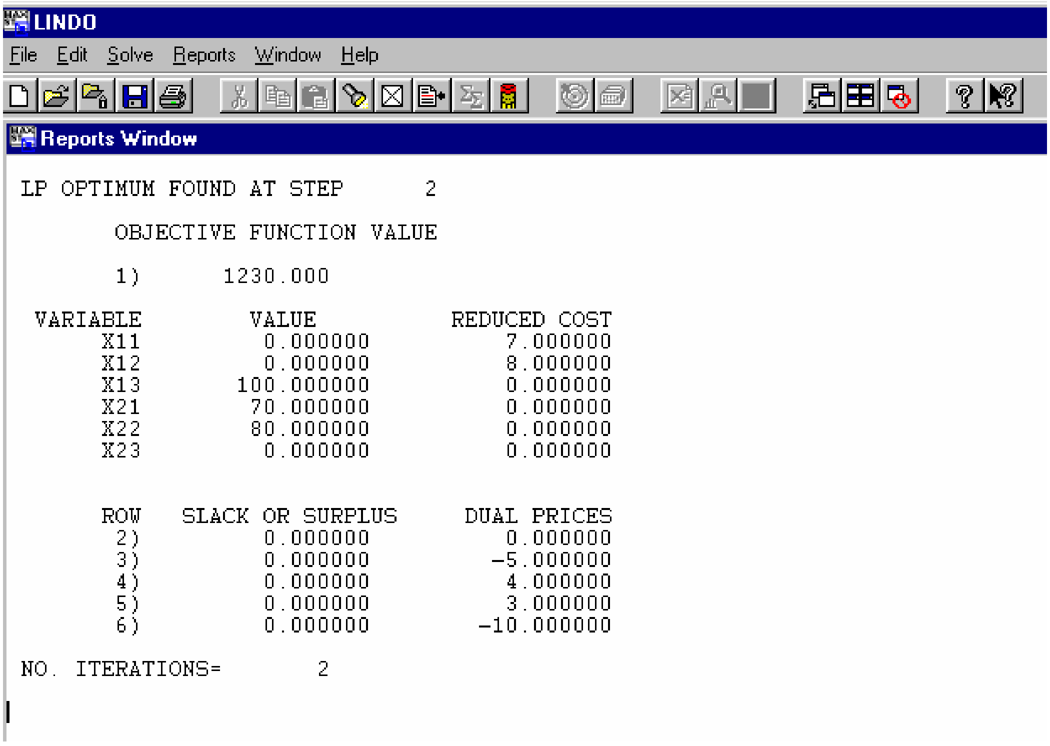
X13+X23=100

Izgled ekrana sa postavkom zadatka je dat na slici 33, dok je izgled ekrana sa rešenjem dat na slici 34.




```
!Kompanija ima dve punionice sokova P1 i P2 i 3 distributivna centra D1, D2 i D3
!Cene transporta po kutiji, kapaciteti punionica i mogucnost plasmana su dati
!u sledecoj tabeli
!
!               D1              D2              D3
!               (70)            (80)            (100)

!P1(70)          3              5               10

!P2(80)         1               2               15


MIN 3X11+5X12+10X13+1X21+2X22+15X23
ST
X11+X12+X13=100
X21+X22+X23=150
X11+X21=70
X12+X22=80
X13+X23=100
END
```

Slika 33. Izgled ekrana sa postavkom zadatka




```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      1230.000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11         0.000000          7.000000
      X12         0.000000          8.000000
      X13       100.000000          0.000000
      X21        70.000000          0.000000
      X22        80.000000          0.000000
      X23         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000         -5.000000
       4)         0.000000          4.000000
       5)         0.000000          3.000000
       6)         0.000000        -10.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

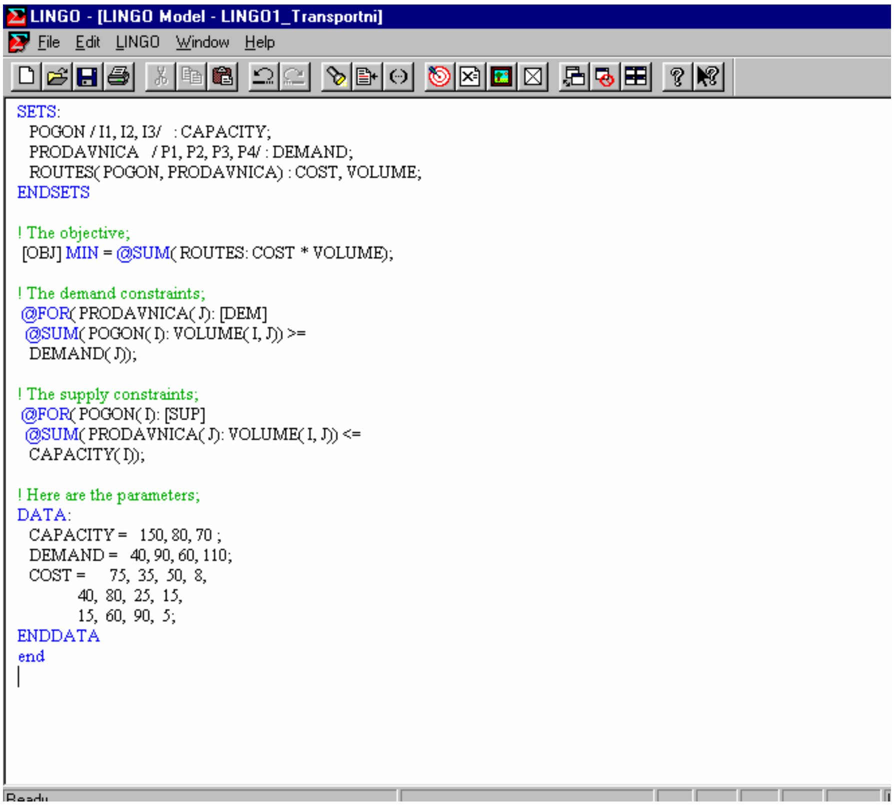
Slika 34. Izgled ekrana sa rešenjem zadatka

Primer 4: Transportni problem (Rešenje pomoću programa LINGO)

Kompanija poseduje 3 pogona u mestima I1, I2 i I3 i 4 prodavnice u mestima P1, P2, P3 i P4. Kapaciteti proizvodnih pogona su 150, 80 i 70 tona proizvoda, a mogucnosti prodaje u naznacenim mestima su 40, 90, 60 i 110 tona proizvoda. Troskovi transporta po jedinici su dati u sledećoj tabeli:

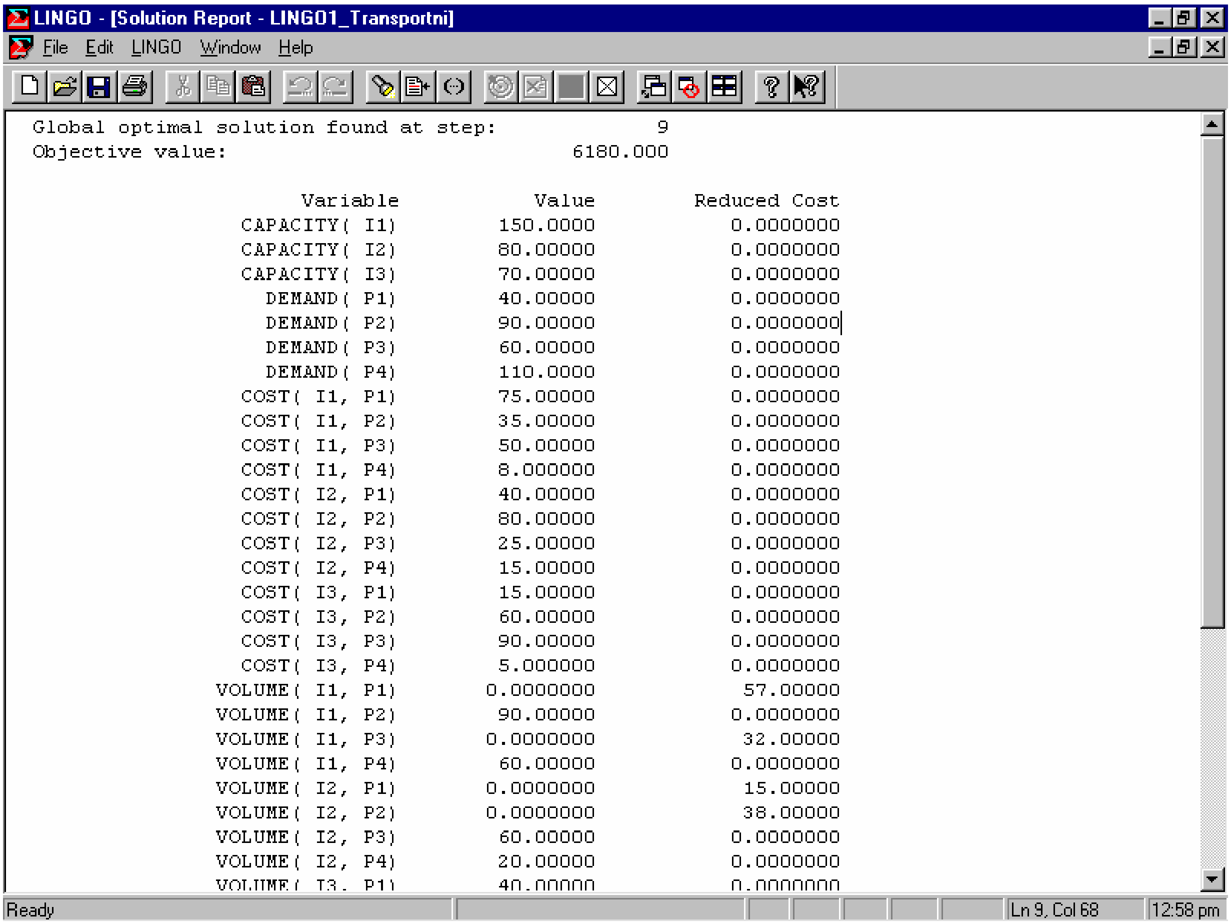
Prodavnice ⇒ Pogoni ⇓	P_1 (40)	P_2 (90)	P_3 (60)	P_4 (110)
I_1 (150)	75	35	50	8
I_2 (80)	40	80	25	15
I_3 (70)	15	60	90	5

Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom je dat na slici 35.



Slika 35. Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom

Izgled ekrana sa listingom rešenja zadatka je dat na slici 36.



Slika 36. Izgled ekrana sa rešenjem zadatka (Solution Report)

Kompletan listing rešenja je dat kao:

```
Global optimal solution found at step:          9
 Objective value:                        6180.000

                    Variable           Value        Reduced Cost
               CAPACITY( I1)        150.0000           0.0000000
               CAPACITY( I2)        80.00000           0.0000000
               CAPACITY( I3)        70.00000           0.0000000
                 DEMAND( P1)        40.00000           0.0000000
                 DEMAND( P2)        90.00000           0.0000000
                 DEMAND( P3)        60.00000           0.0000000
                 DEMAND( P4)        110.0000           0.0000000
               COST( I1, P1)        75.00000           0.0000000
               COST( I1, P2)        35.00000           0.0000000
               COST( I1, P3)        50.00000           0.0000000
               COST( I1, P4)        8.000000           0.0000000
               COST( I2, P1)        40.00000           0.0000000
               COST( I2, P2)        80.00000           0.0000000
               COST( I2, P3)        25.00000           0.0000000
               COST( I2, P4)        15.00000           0.0000000
               COST( I3, P1)        15.00000           0.0000000
```

```
   COST( I3, P2)        60.00000          0.0000000
   COST( I3, P3)        90.00000          0.0000000
   COST( I3, P4)        5.000000          0.0000000
 VOLUME( I1, P1)       0.0000000           57.00000
 VOLUME( I1, P2)        90.00000          0.0000000
 VOLUME( I1, P3)       0.0000000           32.00000
 VOLUME( I1, P4)        60.00000          0.0000000
 VOLUME( I2, P1)       0.0000000           15.00000
 VOLUME( I2, P2)       0.0000000           38.00000
 VOLUME( I2, P3)        60.00000          0.0000000
 VOLUME( I2, P4)        20.00000          0.0000000
 VOLUME( I3, P1)        40.00000          0.0000000
 VOLUME( I3, P2)       0.0000000           28.00000
 VOLUME( I3, P3)       0.0000000           75.00000
 VOLUME( I3, P4)        30.00000          0.0000000

            Row    Slack or Surplus      Dual Price
            OBJ        6180.000            1.000000
        DEM( P1)       0.0000000          -25.00000
        DEM( P2)       0.0000000          -42.00000
        DEM( P3)       0.0000000          -25.00000
        DEM( P4)       0.0000000          -15.00000
        SUP( I1)       0.0000000           7.000000
        SUP( I2)       0.0000000          0.0000000
        SUP( I3)       0.0000000           10.00000
```

Primer 5: Transportni problem sa degenerisanim baznim rešenjem

Tri prodajna objekta (P1, P2 i P3) mogu da se snabdevaju brašnom iz 4 skladišta (S1 – S4). Kapaciteti skladišta u razmatranom vremenskom periodu, konzumne moći regiona koje pokrivaju prodavnice i jediniđni troškovi transporta su dati u sledećoj tabeli:

Prodavnice ⇒ / Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10	12	0
S_2 (30)	8	4	3
S_3 (20)	6	9	4
S_4(10)	7	8	5

Rešenje:

$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$ =80, radi se o zatvorenom modelu transportnog problema.

Početno bazno rešenje je dato u sledećoj tabeli:

Prodavnice ⇒ Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10 20	12	0
S_2 (30)	8 20	4 10	3
S_3 (20)	6	9	4 20
S_4(10)	7	8	5 10

Potreban broj jednačina: r = m+n-1 = 4+3 – 1 =6

Broj baznih polja u početnom rešenju je 5, bazno rešenje je degenerisano.

Početni troškovi transporta su:

T_0=10*20+8*20+4*10+4*20+5*10=530 n.j.

Početna matrica tranporta je : $X_0 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Za bazna polja se računaju $c_{ij} = u_i + v_j$;

$c_{11} = u_1 + v_1 = 10$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 8$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 4$
$c_{33} = u_3 + v_3 = 4$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$

v_1=0 (pojavljuje se 2 puta)
(Moglo je biti i u_2 i v_3
izjednačeno sa nulom)

$u_1 = 10-v_1=10-0=10$
$u_2 = 8-v_1=8-0=8$
$v_2 = 4-u_2=4-8=-4$

U baznom rešenju nedostaje jedno bazno polje. Neko od nebaznih polja (x_{13}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{41}, x_{42}) biće prevedeno u bazno, na taj način da će preko njega ići proizvoljno mala količina materijala ε>0, uz zadovoljavanja uslova minimalne cene i uslova da ima smisla, odnosno da povezuje nedostajuće koeficijente u_i i v_j.

U konkretnom slučaju, minimalna jedininična cena je:

$$\min\{c_{13}, c_{23}, c_{31}, c_{32}, c_{41}, c_{42}\} = c_{13} = 0$$

Polje x_{13} zadovoljava oba uslova.

$c_{13} = \varepsilon \cong 0 = u_1 + v_3$ => $v_3 = 0 - u_1 = 0 - 10 = -10$; $u_3 = 4 - v_3 = 4 - (-10) = 14$
$u_4 = 5 - v_3 = 5 - (-10) = 15$

Za nebazna polja se računaju potencijali: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 12 - 10 - (-4) = 6$
$\Delta_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 3 - 8 - (-10) = 5$
$\Delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 9 - 2 - 6 = 1$
$\boldsymbol{\Delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 6 - 14 - 0 = -8}$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - 14 - (-4) = -1$
$\boldsymbol{\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = 7 - 15 - 0 = -8}$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 8 - 15 - (-4) = -3$

Rešenje nije optimalno, pošto su neki od potencijala negativni. Najveći potencijal imaju polja x_{31} i x_{41}. Za novo pazno polje se bira x_{31}, pošto je $c_{31} < c_{41}$. Na polje x_{31} se postavlja neka količina materilaja θ, kao što je dato u sledećoj tabeli:

Prodavnice ⇒ / Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10 / 20- θ	12	0 / ε+ θ
S_2 (30)	8 / 20	4 / 10	3
S_3 (20)	6 / +θ	9	4 / 20- θ
S_4(10)	7	8	5 / 10

Količina materijala θ se odredjuje kao: $\min\begin{cases}20-\theta\\20-\theta\end{cases}\Rightarrow \theta = 20$

Tabela transportnog problema posle prvog koraka optimizacije je data kao:

Prodavnice ⇒ / Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10	12	0 / 20
S_2 (30)	8 / 20	4 / 10	3
S_3 (20)	6 / 20	9	4
S_4(10)	7	8	5 / 10

Rešenje posle prvog koraka optimizacije je:

Funkcija cilja, troškovi:

T_1=8*20+4*10+6*20+5*10=379 n.j.

Matrica tranporta je : $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 20 & 10 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

Broj baznih polja je 5, novo bazno rešenje je takodje degenerisano.

Za bazna polja se računaju $c_{ij} = u_i + v_j$;

$c_{13} = u_1 + v_3 = 0$	$u_2=0$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 8$	(pojavljuje se 2 puta)
$c_{22} = u_2 + v_2 = 4$	$v_1=8$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 6$	$v_2=4$
$c_{43} = u_4 + v_3 = 5$	$u_3=-2$

U baznom rešenju nedostaje jedno bazno polje. Neko od nebaznih polja (x_{11}, x_{12}, x_{23}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}) biće prevedeno u bazno, na taj način da će preko njega ići proizvoljno mala količina materijala $\varepsilon>0$, uz zadovoljavanja uslova minimalne cene i uslova da ima smisla, odnosno da povezuje nedostajuće koeficijente u i v.

U konkretnom slučaju, minimalna jedininična cena je:

$$\min\{c_{11}, c_{12}, c_{23}, c_{32}, c_{33}, c_{41}, c_{42}\} = c_{23} = 3$$

Polje x_{23} zadovoljava oba uslova.

c_{13}= 3= $u_2 + v_3$ = >
$v_3 = 3$, $u_1 = -3$, $u_4 = 2$

Za nebazna polja se računaju potencijali: $\Delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$;

$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 5$
$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 11$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 7$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 3$
$\Delta_{41} = c_{41} - u_4 - v_1 = -3$ → Rešenje nije optimalmo
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 2$

Za novo pazno polje se bira x_{41}. Na polje x_{41} se postavlja neka količina materilaja θ, kao što je dato u sledećoj tabeli:

Prodavnice ⇒ / Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10	12	0 / 20
S_2 (30)	8 / 20-θ	4 / 10	3 / +ε+θ
S_3 (20)	6 / 20	9	4
S_4(10)	7 / +θ	8	5 / 10- θ

Količina materijala θ se odredjuje kao: $\min\begin{cases} 20-\theta \\ 10-\theta \end{cases} \Rightarrow \theta = 10$

Novo bazno rešenje, posle drugog koraka optimizacije je dato u sledećoj tabeli:

Prodavnice ⇒ / Skladišta ⇓	P_1 (40)	P_2 (10)	P_3 (30)
S_1 (20)	10	12	0 / 20
S_2 (30)	8 / 10	4 / 10	3 / 10
S_3 (20)	6 / 20	9	4
S_4(10)	7 / 10	8	5

Rešenje posle drugog koraka optimizacije je:

Funkcija cilja, troškovi:

T_1=8*10+4*10+3*10+6*20+7*10=340 n.j.

Matrica tranporta je : $X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Broj baznih polja je 6, novo bazno rešenje je nedegenerisano.

Za bazna polja:

$c_{13} = u_1 + v_3 = 0$
$c_{21} = u_2 + v_1 = 8$
$c_{22} = u_2 + v_2 = 4$
$c_{23} = u_2 + v_3 = 3$
$c_{31} = u_3 + v_1 = 6$
$c_{41} = u_4 + v_1 = 5$

$u_2=0$
$v_1=8$
$v_2=4$
$v_3=3$
$u_1=-3$
$u_3=-2$
$u_4=-1$

Za nebazna polja:

$\Delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 5$
$\Delta_{12} = c_{12} - u_1 - v_2 = 11$
$\Delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 7$
$\Delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 3$
$\Delta_{42} = c_{42} - u_4 - v_2 = 5$
$\Delta_{43} = c_{43} - u_4 - v_3 = 3$

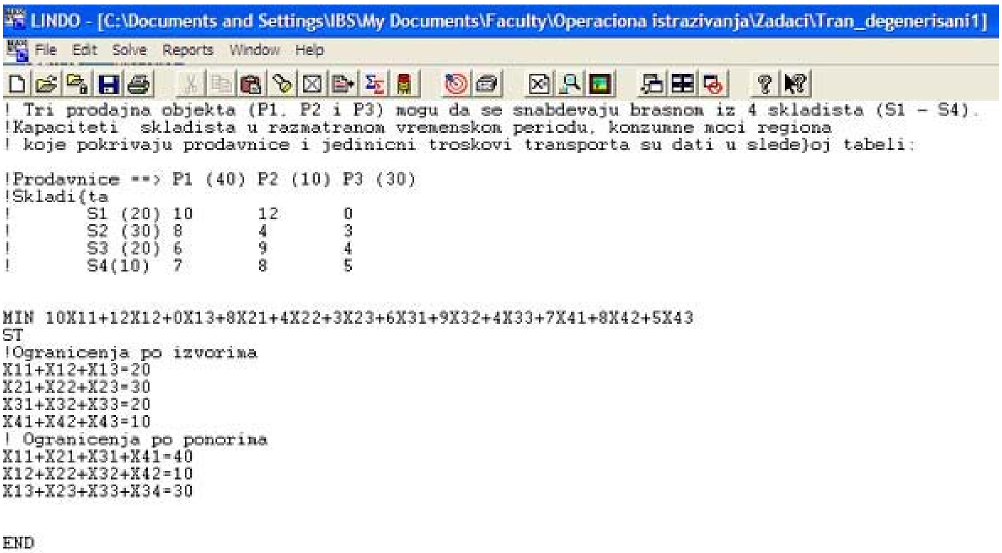
Rešenje je oprimalno:

$$X^* = X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{min}=T_2=340$ n.j.

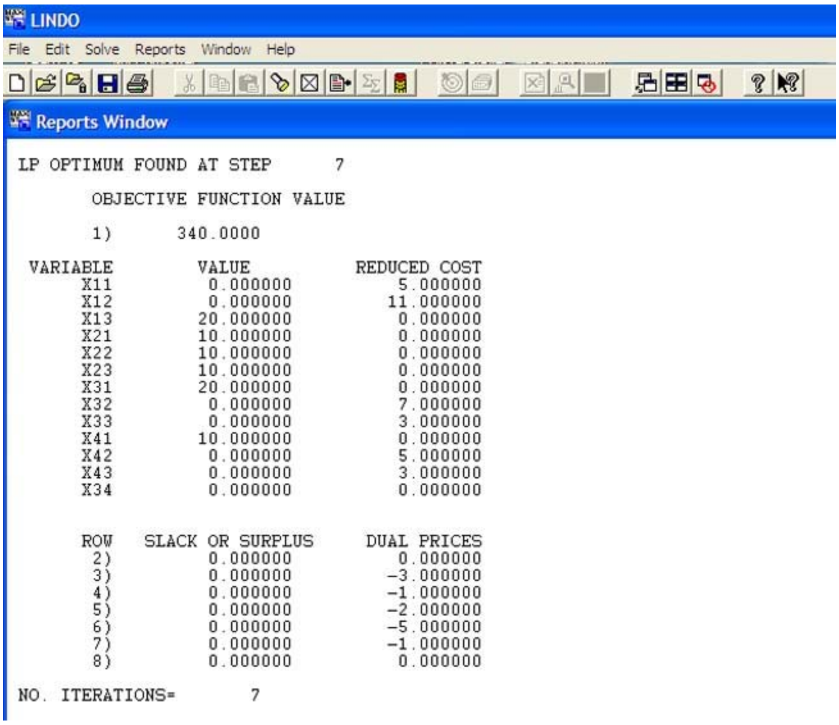
Primer 6: Rešenje transportnog problema iz primera 5 pomoću računarskog programa LINDO.

Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom je dat na slici 37, dok je izgled ekrana sa rešenjem dat na slici 38.




```
! Tri prodajna objekta (P1, P2 i P3) mogu da se snabdevaju brasnom iz 4 skladista (S1 - S4).
!Kapaciteti  skladista u razmatranom vremenskom periodu, konzumne moci regiona
! koje pokrivaju prodavnice i jedinicni troskovi transporta su dati u slede}oj tabeli:

!Prodavnice ==> P1 (40) P2 (10) P3 (30)
!Skladi{ta
!       S1 (20) 10      12      0
!       S2 (30) 8       4       3
!       S3 (20) 6       9       4
!       S4(10)  7       8       5

MIN 10X11+12X12+0X13+8X21+4X22+3X23+6X31+9X32+4X33+7X41+8X42+5X43
ST
!Ogranicenja po izvorima
X11+X12+X13=20
X21+X22+X23=30
X31+X32+X33=20
X41+X42+X43=10
! Ogranicenja po ponorima
X11+X21+X31+X41=40
X12+X22+X32+X42=10
X13+X23+X33+X34=30

END
```

Slika 37. Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom

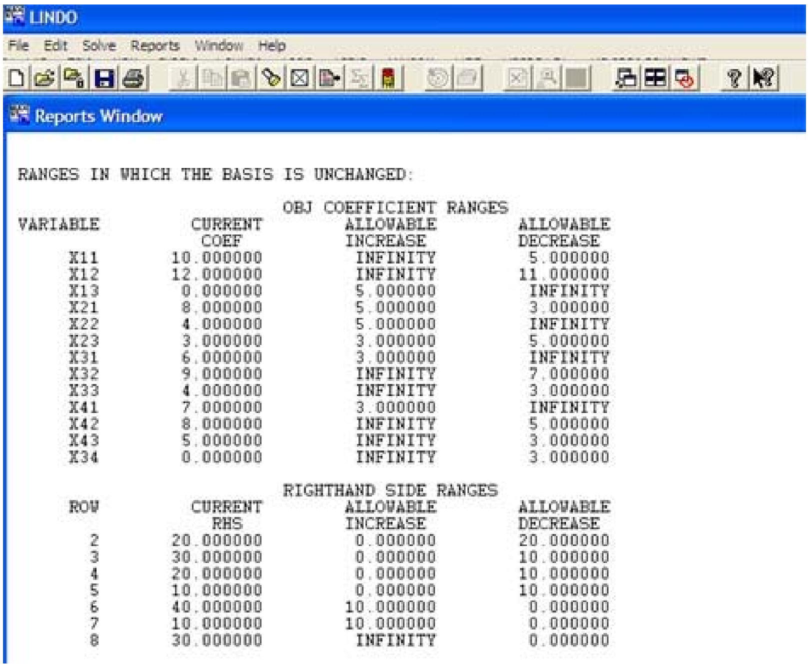



```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP       7

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)       340.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
      X11         0.000000          5.000000
      X12         0.000000         11.000000
      X13        20.000000          0.000000
      X21        10.000000          0.000000
      X22        10.000000          0.000000
      X23        10.000000          0.000000
      X31        20.000000          0.000000
      X32         0.000000          7.000000
      X33         0.000000          3.000000
      X41        10.000000          0.000000
      X42         0.000000          5.000000
      X43         0.000000          3.000000
      X34         0.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         0.000000          0.000000
       3)         0.000000         -3.000000
       4)         0.000000         -1.000000
       5)         0.000000         -2.000000
       6)         0.000000         -5.000000
       7)         0.000000         -1.000000
       8)         0.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       7
```

Slika 38. Izgled ekrana sa rešenjem

Kao što se vidi, dobijeno rešenje je identično sa rešenjem iz primera 5.

I kod transportnog problema, kao posebnog modela LP moguće je uraditi postoptimalnu analizu, odnosno, odrediti granice u kojima se mogu menjati diskretne promenljive iz matematičkog modela, us uslov da bazno rešenje ostane optimalno. Izgled ekrana posle izvršene postoptimalne analize je dat na slici 39.



RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X11	10.000000	INFINITY	5.000000
X12	12.000000	INFINITY	11.000000
X13	0.000000	5.000000	INFINITY
X21	8.000000	5.000000	3.000000
X22	4.000000	5.000000	INFINITY
X23	3.000000	3.000000	5.000000
X31	6.000000	3.000000	INFINITY
X32	9.000000	INFINITY	7.000000
X33	4.000000	INFINITY	3.000000
X41	7.000000	3.000000	INFINITY
X42	8.000000	INFINITY	5.000000
X43	5.000000	INFINITY	3.000000
X34	0.000000	INFINITY	3.000000

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	20.000000	0.000000	20.000000
3	30.000000	0.000000	10.000000
4	20.000000	0.000000	10.000000
5	10.000000	0.000000	10.000000
6	40.000000	10.000000	0.000000
7	10.000000	10.000000	0.000000
8	30.000000	INFINITY	0.000000

Slika 39. Izgled ekrana posle izvršene postoptimalne analize

Postoptimalna analiza daje dozvoljene granice promena jediničnih cena transporta (Obj. Coefficient Ranges) i dozvoljene granice promena kapaciteta izvora i ponora (Righthand Side Ranges).

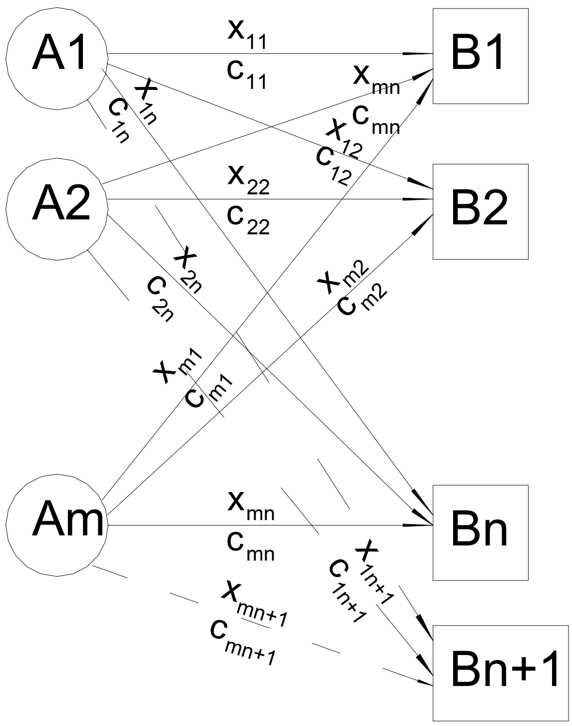
2.8.2. Otvoreni model transportnog problema

U praksi se često može pojaviti problem neuravnoteženja kapaciteta izvora i ponora, i to u oba smera, pri čemu se mogu razlikovati sledeći slučajevi:

1 slučaj: kapaciteti izvora su veći od kapaciteta ponora

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{39}$$

Ovakav problem se rešava na taj način, što se uvodi dodatni virtuelni ponor B_{n+1}, pri čemu su cene transporta od bilo kog realnog izvora do ovog virtuelnog ponora $c_{i,n+1}$=0n.j. Ovakav slučaj je dat na slici 40.



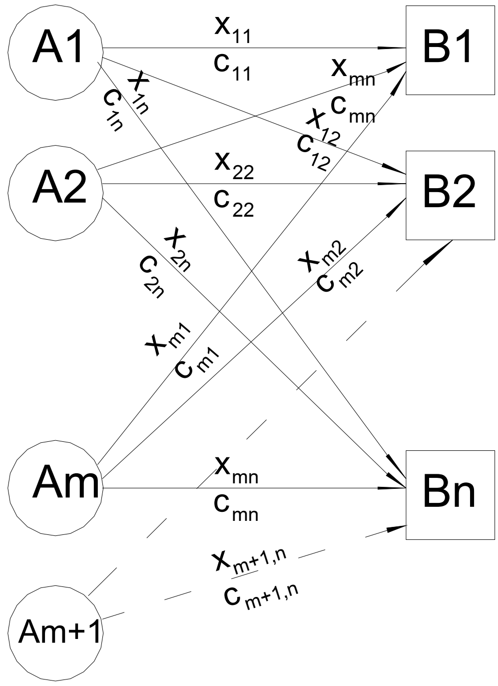
Slika 40. Slučaj 1 - kapaciteti izvora veći od kapaciteta ponora

Virtuelnom ponoru se dodeljuje nedostajući kapacitet, odnosno, otvoreni transportni problem se prevodi u zatvoreni transportni problem. Dalji postupak je standardni. Odredjuju se količine koje se transportuju od svakog izvora do svih ponora (uključujući i virtuelni). Količine koje se transportuju u virtuelni ponor su takodje virtuelne, i one predstavljaju zapravo količine koje će ostati u svakom od izvora, pod uslovom dobijanja optimalnog baznog rešenja.

2 slučaj: kapaciteti ponora su veći od kapaciteta izvora

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{40}$$

Ovakav problem se rešava na taj način, što se uvodi dodatni virtuelni izvora A_{m+1}, pri čemu su cene transporta od tog izvora do bilo kog realnog ponora $c_{m+1,\,i}$=0 n.j. Ovakav slučaj je dat na slici 41.



Slika 41. Slučaj 2 - kapaciteti ponora su veći od kapaciteta izvora

Virtuelnom izvoru se dodeljuje nedostajući kapacitet, odnosno, otvoreni transportni problem se prevodi u zatvoreni transportni problem. Dalji postupak je standardni. Odredjuju se količine koje se transportuju iz novouvedenog izvora do svakog ponora. Količine koje se transportuju iz virtuelnog izvora su takodje virtuelne, i one predstavljaju zapravo nedostajuće količine, odnosno količine za koje će svaki od ponora ostati uskraćen, pod uslovom dobijanja optimalnog baznog rešenja.

2.8.2.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

Preduzeće robnih kuća potrošače u četri grada (G1, G2, G3 i G4) snabdeva sladoledom iz svojih velikih hladnjača (H1, H2 i H3). Za razmatrani letnji mesec, potrebe potrošača, kapaciteti skladišta – hladnjača i jedinični troškovi transporta su dati u sledećoj tabeli.

Potrošači ⇒ / Skladišta ⇓	G_1	G_2	G_3	G_4	*Kapaciteti izvora*
H_1	7	8	4	8	20
H_2	5	3	5	6	30
H_3	9	5	7	9	25
Kapaciteti ponora	20	20	20	20	75 / 80

Može se videti da su kapaciteti ponora veći od kapaciteta izvora, odnosno da se ima otvoreni transportni problem.

Otvoreni transportni problem se prevodi u zatvoreni uvodjenjem dodatnog virtuelnog izvora, hladnjače H_4, kojoj se dodeljuje nedostajući kapacitet, u ovom slučaju 5 jedinica proizvoda, tako da je sada problem definisan sledećom tabelom:

	G_1 (20)	G_2 (20)	G_3(20)	G_4(20)
H_1 (20)	7	8	4	8
H_2 (30)	5	3	5	6
H_3 (25)	9	5	7	9
H^*_4(5)	0	0	0	0

Problem će dalje biti rešen pomoću paketa LINDO, kao problem LP.

Matematički model problema je:

Funkcija cilja:

min F(X)=7X11+8X12+4X13+8X14+5X21+3X22+5X23+6X24+9X31+5X32+7X33+
+9X34+0X41+0X42+0X43+0X44

Ograničenja po izvorima su:

X11+X12+X13+X14=20

X21+X22+X23+X24=30

X31+X32+X33+X34=25

X41+X42+X43+X44=5

Ograničenja po ponorima su:

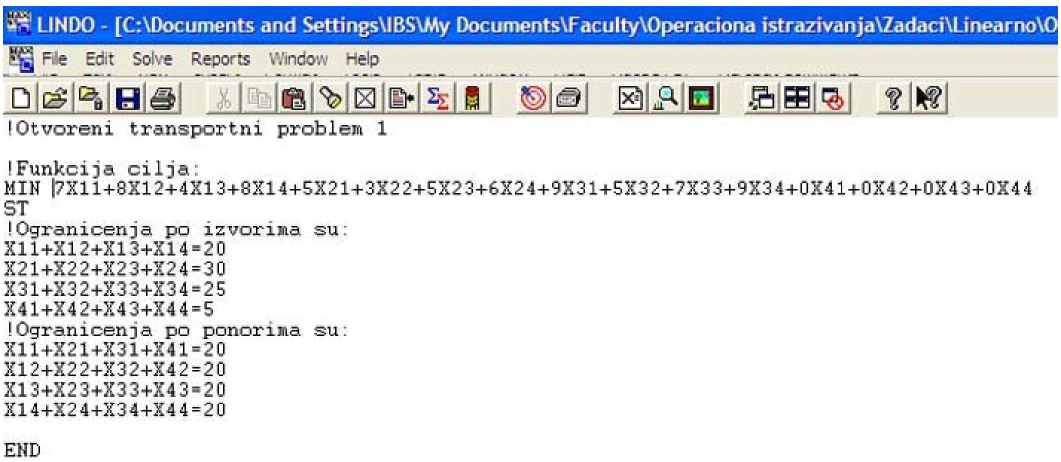
X11+X21+X31+X41=20

X12+X22+X32+X42=20

X13+X23+X33+X43=20

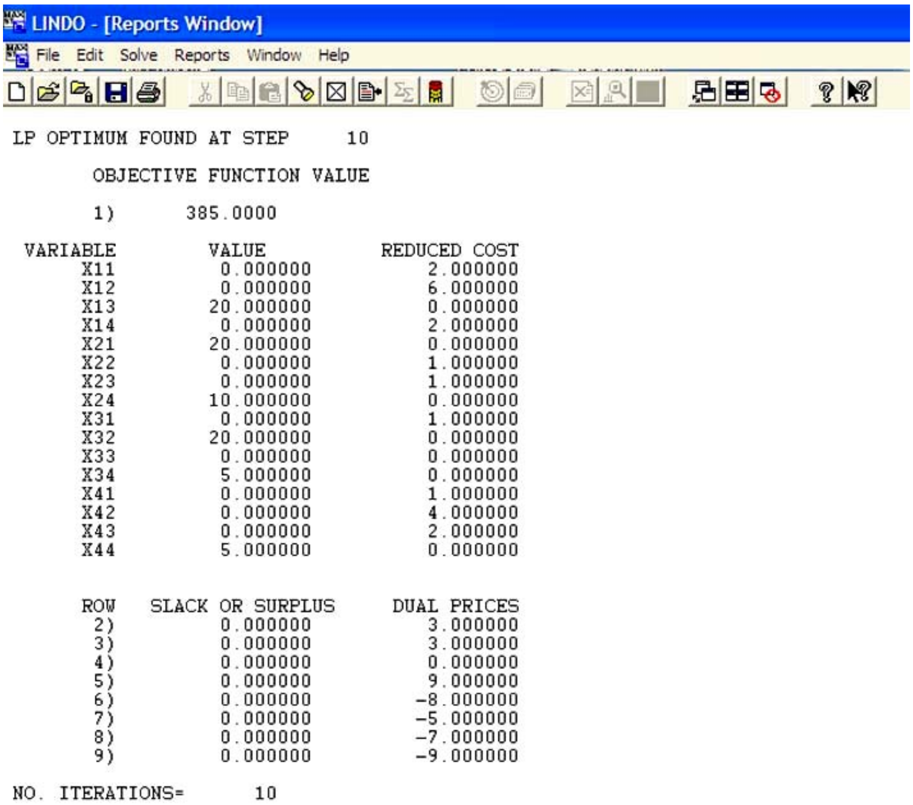
X14+X24+X34+X44=20

Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom je dat na slici 42.



Slika 42. Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom

Izgled ekrana sa rešenjem, odnosno izveštajem je dat na slici 43.



LINDO - [Reports Window]

File Edit Solve Reports Window Help

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      10

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      385.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         0.000000          2.000000
       X12         0.000000          6.000000
       X13        20.000000          0.000000
       X14         0.000000          2.000000
       X21        20.000000          0.000000
       X22         0.000000          1.000000
       X23         0.000000          1.000000
       X24        10.000000          0.000000
       X31         0.000000          1.000000
       X32        20.000000          0.000000
       X33         0.000000          0.000000
       X34         5.000000          0.000000
       X41         0.000000          1.000000
       X42         0.000000          4.000000
       X43         0.000000          2.000000
       X44         5.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          3.000000
        3)         0.000000          3.000000
        4)         0.000000          0.000000
        5)         0.000000          9.000000
        6)         0.000000         -8.000000
        7)         0.000000         -5.000000
        8)         0.000000         -7.000000
        9)         0.000000         -9.000000

NO. ITERATIONS=       10
```

Slika 43. Izgled ekrana sa izveštajem

Optimalna matrica transporta je: $X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Iz rešenja se vidi da je optimalno rešenje, da sva količina iz virtuelnog izvora 4 ode u potrošački centar G4. Odnosno, u datom slučaju je optimalno rešenje takovo, da se raspoloživa količina sladoleda transportuje sa minimalnim troškovima na dati način, pri čemu će potrošači u gradu G4 ostati uskraćeni za 5 t.j. omiljenog sladoleda.

2.8.3. Problem rasporedjivanja (asignacije)

Problem rasporedjivanja predstavlja poseban slučaj transportnog problema, pri čemu se specifičnost ogleda u sistemu ograničenja.

Suština problema je da se na optimalan način rasporedi n izvršioca na n poslova, ili da se n zadataka na optimalan način rasporedi na n mašina i slično, pri čemu je pretpostavka da jedan izvršioc može primiti jedan radni zadatak i da se svaki radni zadatak može dodeliti samo jednom izvršiocu (ili mašini).

Pri ovome je efikasnost izvršioca pri obavljanju zadataka različita, ili je cena koštanja izvršioca ili mašina pri obavljanju zadataka različita.

Problem rasporedjivanja se može predstaviti tabelom 3.

Tabela 3. Tabelarna predstava problema rasporedjivanja

Poslovi / Izvršioci	P_1	...	P_n	Kapacitet ozvršioca a_i
I_1	c_{11} x_{11}	...	c_{1n} x_{1n}	*1*
...	...	...	...	...
I_n	c_{m1} x_{m1}	...	c_{nn} x_{nn}	*1*
Potrebe zadataka b_j	*1*	...	*1*	$\Sigma a_i = \Sigma b_i = n$

gde su: x_{ij} = 1, ako je i-tom radniku dodeljen j-ti zadatak

x_{ij}= 0 u protivnom slučaju

c_{ij} *– vreme potrebno i-tom radniku da obavi j-ti zadatak*

Fukncija kriterijuma čiji minimum treba odrediti ima sledeći oblik:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (41)$$

Sistem ograničenja je:

- jednom izvršioc može da obavlja samo jedan zadatak:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1;\_ i = 1,2....n \qquad (42)$$

- jedan zadatak može biti dodeljen samo jednom izvršiocu:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1;\_ j = 1,2....n \qquad (43)$$

Ostale karakteristike modela rasporedjivanja su:

- matrica rasporedjivanja mora biti kvadratna (n x n),
- promenljive x_{ij} mogu uzimati samo vrednosti 0 ili 1,
- svako bazično rešenje je degenerisano, jer ima samo n bazičnih promenljivih.

Iz ovoga proizilazi da je ove probleme najbolje rešavati pomoću računara.

2.8.3.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

Pet radnika treba rasporediti na pet različitih poslova. Svaki radnik može izvršiti svaki posao, ali sa različitim vremenima. Treba naći takav raspored da ukupno vreme izvršenja poslova bude minimalno. Potrebna vremena (u satima) za izvršenje poslova su data u sledećoj tabeli:

Poslovi / Radnici	P1	P2	P3	P4	P5
R1	14	9	12	8	16
R2	8	7	9	9	14
R3	9	11	10	10	12
R4	10	8	8	6	14
R5	11	9	10	7	13

Matematički model problema je:

F-ja cilja:

T(min)=14X11+9X12+12X13+8X14+16X15+8X21+7X22+9X23+9X24+14X25+9X31+11X32+10X33+10X34+12X35+10X41+8X42+8X43+6X44+14X45+11X51+9X52+10X53+7X54+13X55

Ograničenja po radnicima (jedan radnik može raditi samo jedan posao):

X11+X12+X13+X14+X15=1

X21+X22+X23+X24+X25=1

X31+X32+X33+X34+X35=1

X41+X42+X43+X44+X45=1

X51+X52+X53+X54+X55=1

Ograničenja po poslovima (jedan posao može biti pokriven samo jednim radnikom):

X11+X21+X31+X41+X51=1

X12+X22+X32+X42+X52=1

X13+X23+X33+X43+X53=1

X14+X24+X34+X44+X54=1

X15+X25+X35+X45+X55=1

Izgled ekrana sa listingom rešenja zadatka je dat na slici 44.

```
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help
! PROBLEM RASPOREDJIVANJA
! Pet radnika treba rasporediti na pet razlicitih poslova.
! Svaki radnik moze izvrsiti svaki posao, ali sa razlicitim vremenima.
! Treba naci takav rspored da ukupno vreme izvrsenja poslova bude minimalno.
! Potrebna vremena za izvrsenje poslova su data u sledecoj tabeli:
!Poslovi:       P1      P2      P3      P4      P5
! Radnici
!       R1      14      9       12      8       16
!       R2      8       7       9       9       14
!       R3      9       11      10      10      12
!       R4      10      8       8       6       14
!       R5      11      9       10      7       13


MIN 14X11+9X12+12X13+8X14+16X15+8X21+7X22+9X23+9X24+14X25+9X31+11X32+10X33+10X34+12X35+
10X41+8X42+8X43+6X44+14X45+11X51+9X52+10X53+7X54+13X55
ST
!Ogranicenja po radnicima (jedan radnik moze raditi samo jedan posao)
X11+X12+X13+X14+X15=1
X21+X22+X23+X24+X25=1
X31+X32+X33+X34+X35=1
X41+X42+X43+X44+X45=1
X51+X52+X53+X54+X55=1
! Ogranicenja po poslovima (jedan posao moze biti pokriven samo jednim radnikom)
X11+X21+X31+X41+X51=1
X12+X22+X32+X42+X52=1
X13+X23+X33+X43+X53=1
X14+X24+X34+X44+X54=1
X15+X25+X35+X45+X55=1

END
```

Slika 44. Izgled ekrana sa postavkom zadatka

Izgled ekrana sa listingom rešenja zadatka je dat na slici 45.

```
LINDO - [Reports Window]
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

 LP OPTIMUM FOUND AT STEP      15

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      44.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X11         0.000000          4.000000
       X12         1.000000          0.000000
       X13         0.000000          2.000000
       X14         0.000000          0.000000
       X15         0.000000          3.000000
       X21         1.000000          0.000000
       X22         0.000000          0.000000
       X23         0.000000          1.000000
       X24         0.000000          3.000000
       X25         0.000000          3.000000
       X31         0.000000          0.000000
       X32         0.000000          3.000000
       X33         0.000000          1.000000
       X34         0.000000          3.000000
       X35         1.000000          0.000000
       X41         0.000000          2.000000
       X42         0.000000          1.000000
       X43         1.000000          0.000000
       X44         0.000000          0.000000
       X45         0.000000          3.000000
       X51         0.000000          2.000000
       X52         0.000000          1.000000
       X53         0.000000          1.000000
       X54         1.000000          0.000000
       X55         0.000000          1.000000
```

Slika 45. Izgled ekrana sa listingom rešenja zadatka

Poslovi se mogu završiti za najkraće ukupno vreme od 44 časova, ako se prvi radnik rasporedi na drugi posao (X12=1), drugi radnik na prvi posao (X21=1), trećI radnik na peti posao (X35=1), četvrti radnik na trećI posao (X34=1) i peti radnik na četvrti posao (X54=1).

2.9. Celobrojno programiranje

Kod niza praktičnih problema se javlja zahtev da jedna, više ili sve promenljive moraju biti celobrojne (uzimati samo vrednosti koje su celi brojevi), kao što to može biti: broj proizvoda, broj angažovanih radnika, broj mašina koje treba kupiti I slično.

Transportni problem i problem rasporedjivanja sami po sebi zadovoljavaju uslove celobrojnosti.

Za rešavanje problema celobrojnog linearnog programiranja Gomory je 1958. god. razvio algoritam (Gomory-jev algoritam), pomoću koga se može, počev od nekog necelobrojnog rešenja dobiti optimalno celobrojno rešenje. Gomory-jev algoritam zapravo predstavlja zapravo proširenu i prilagodjenu Simplex metodu, u kojoj se pri svakoj iteraciji formira I jedno novo, dopunsko ograničenje, koje ima sledeće osobine:

- ✓ odseca deo konveksnog skupa mogućih rešenja zajedno sa tačkom traženog ekstrema u kojoj je bilo necelobrojno optimalno rešenje, pri čemu se ovim odsecanjem ne gubi ni jedno celobrojno rešenje,
- ✓ pomoću dodatnih ograničenja, pri konačnom broju iteracija se dolazi do optimalnog rešenja.

Računarski paket LINDO ima mogućnosti rešavanja i celobrojnih problema linearnog programiranja i to u slučaju da vrednost celobrojne može biti samo 0 ili 1 i u slučaju da vrednost promenljive može biti bilo koji celi broj.

2.9.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

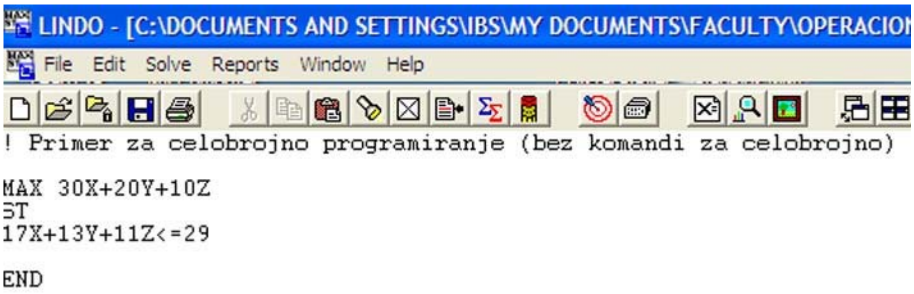
Neka je dat problem linearnog programiranja definisan pomoću sledeće f-je cilja i ograničenja:

max F(x,y,z)= 30X+20Y+10Z
17*x+13*y+11*z<=29

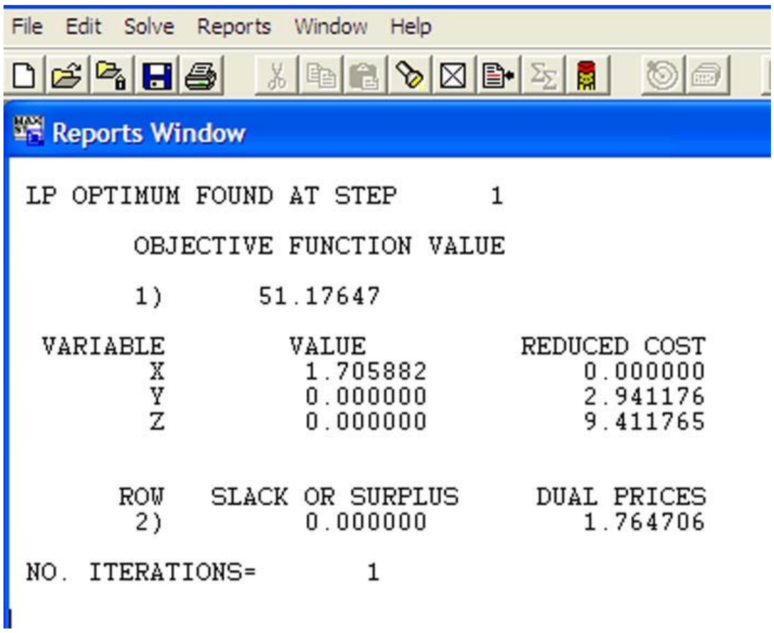
Naći vrednost funkcije cilja i promenljivih u uslovima bez i sa zahtevom za celobrojnošću.

a) Rešenje opšteg modela LP (bez zahteva za celobrojnošću)

Izgledi ekrana sa matematičkim modelom i rešenjem su dati na slikama 46 i 47.



Slika 46. Izgledi ekrana sa matematičkim modelom



Slika 47. Izgledi ekrana sa rešenjem

F-ja cilja:

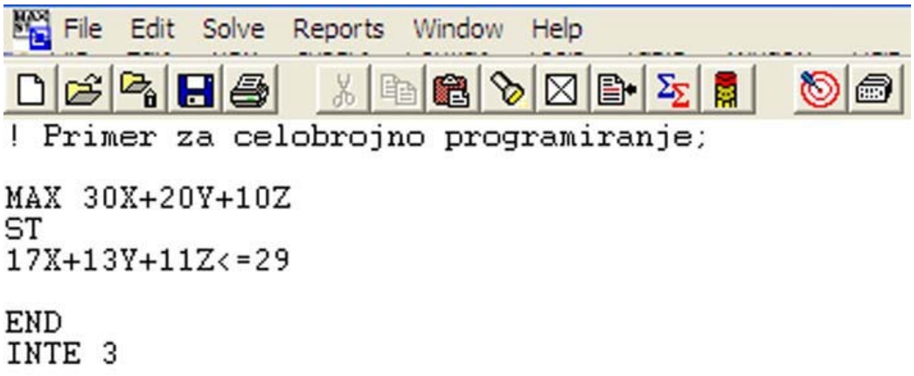
max F(x,y,z)=51.17

Optimalni plan:

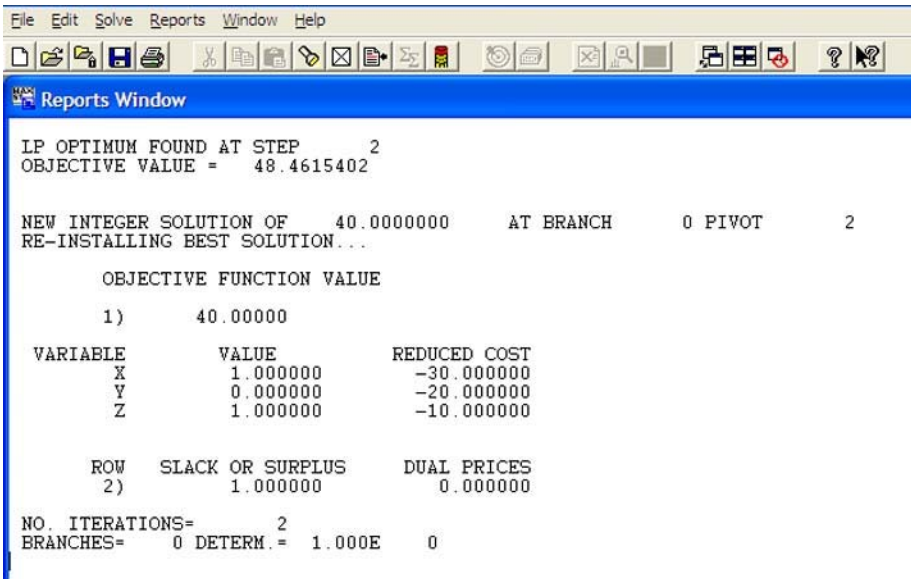
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.705 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Rešenje zadatka kada su sve promenljive celobrojne (0 ili 1 – Komanda INTEGER)

Izgledi ekrana sa matematičkim modelom i rešenjem su dati na slikama 48 i 49.



Slika 48. Izgledi ekrana sa matematičkim modelom



Slika 49. Izgledi ekrana sa rešenjem

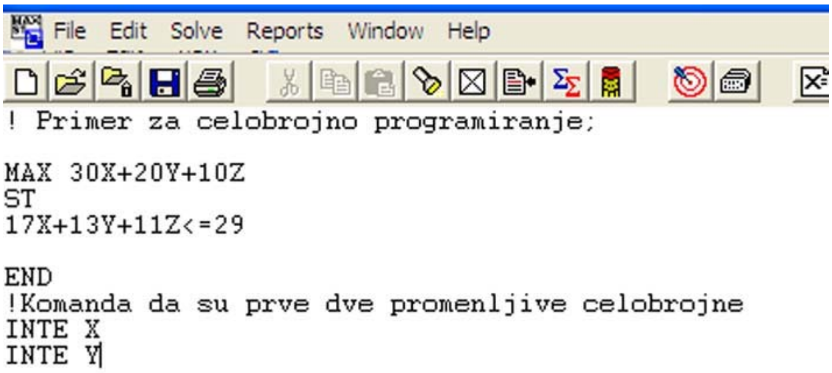
F-ja cilja:

max F(x,y,z)=48.46

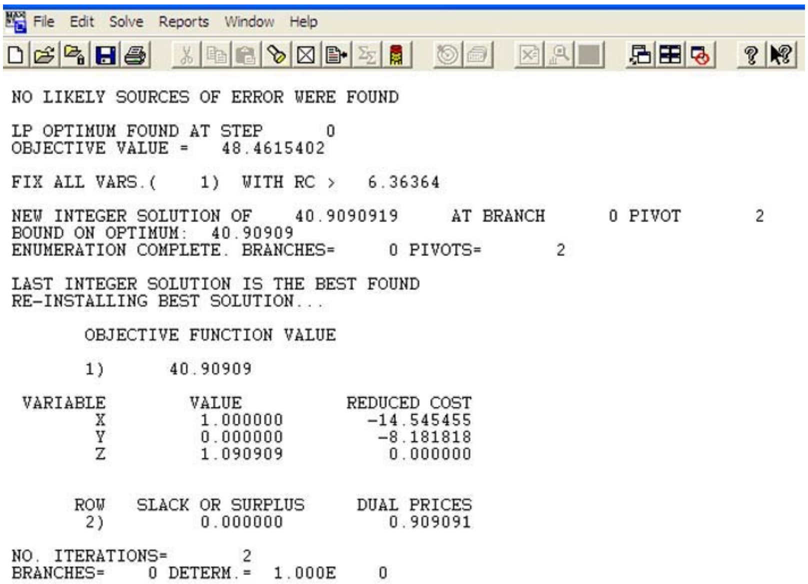
Optimalni plan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.705 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c). Rešenje zadatka kada su prve 2 promenljive celobrojne



Slika 50. Izgled ekrana sa matematičkim modelom



Slika 51. Izgled ekrana sa rešenjem

F-ja cilja:

max F(x,y,z)=40,909

Optimalni plan:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.09 \end{bmatrix}$$

Kao što se moglo i očekivati, funkcija cilja ima najveću vrednost u slučaju kada nema zahteva za celobrojn im ograničenjem.

Primer 2. Odredjivanje optimalnog proizvodnog programa (Primer 3 iz poglavlja 2.6.1.)

Izvršiti optimizaciju proizvodnog programa, koji se sastoji od proizvoda P1 – P7, a u cilju maksimizacije dobiti preduzeća.

Proizvodnja se odvija na 5 mašina M1 do M5. U sledećoj tabeli su data normirana vremena trajanja operacija na pojedinim mašinama, kao i raspoloživi kapaciteti mašina u razmatranom periodu:

Proizvodi ⇒ Mašine ⇓	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	Raspol. kapaciteti (min)
	Trajanje operacija (min/kom)							
M1	2	5	4	25	10	0	30	7000
M2	0	25	15	20	0	10	6	9800
M3	0	20	5	2	1	0	60	3000
M4	1	4	10	18	20	0	20	6200
M5	5	0	0	0	0	10	0	3000

Pored ograničenja u proizvodnim kapacitetima, postoje i tržišna ograničenja koja glase:

- *tržištu se mora isporučiti tačno 1000 kom. svih proizvoda,*
- *količina proizvoda P5 i P7 (P5+P7) ne sme biti manja od 30 komada.*

Dobiti koje je moguće ostvariti na trižištu po pojedinim proizvodima je data u tabeli:

Proizvod	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
Dobit (din/kom)	17	26	16	30	17	30	10

Rešenje: Matematički model

Funkcija cilja:

MAX F(X)=17X1+26X2+16X3+30X4+17X5+30X6+10X7

Ograničenja prouzrokovana raspoloživim kapacitetima mašina:

2X1+5X2+4X3+25X4+10X5+30X7<=7000

25X2+15X3+20X4+10X6+6X7<=9800

20X2+5X3+2X4+X5+60X7<=3000

X1+4X2+10X3+18X4+20X5+20X7<=6200

5X1+10X6<=3000

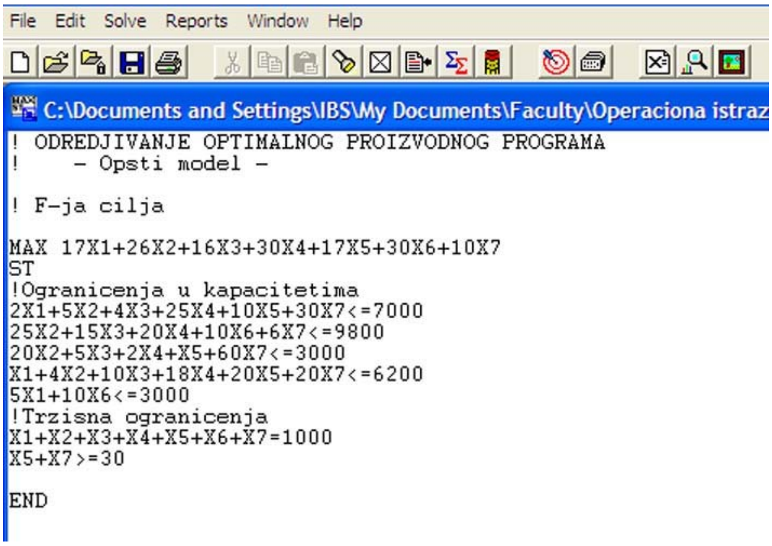
Tržišna ograničenja

X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7=1000

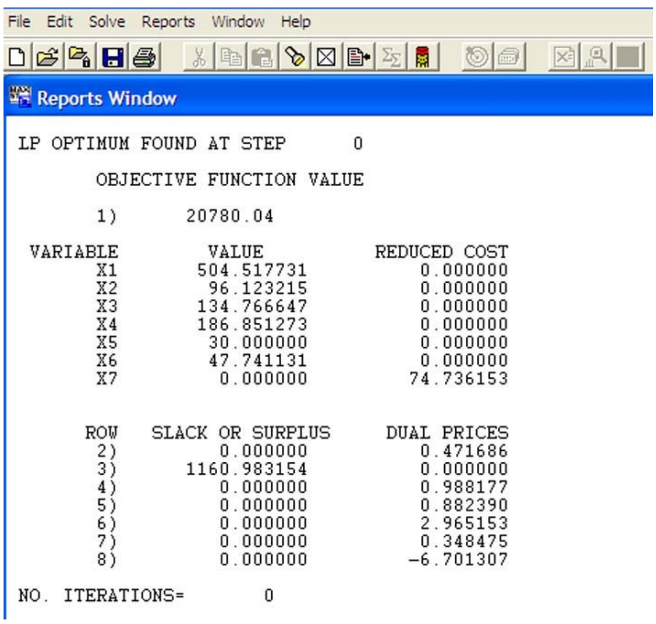
X5+X7>=30

a) Rešenje kada nema zahteva za celobrojnim vrednostima

Izgledi ekrana sa postavkom zadatka i rešenjem su dati na slikama 52 i 53.



Slika 52. Izgledi ekrana sa matematičkim modelom



Slika 53. Izgledi ekrana sa rešenjem

F-ja cilja:

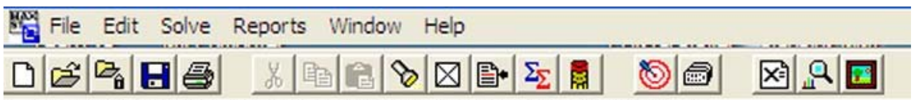
max F(X)=20.780,04 n.j.

Optimalni plan proizvodnje:

$$X^* = \begin{bmatrix} 504{,}517 \\ 96{,}123 \\ 134{,}766 \\ 186{,}851 \\ 30{,}00 \\ 47{,}741 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Rešenje kada se zahteva da sve promenljive budu celobrojne (korišćenje komande GIN)

Izgledi ekrana sa postavkom zadatka i rešenjem su dati na slikama 54 i 55.




```
! ODREDJIVANJE OPTIMALNOG PROIZVODNOG PROGRAMA
!     - Opsti model -

! F-ja cilja

MAX 17X1+26X2+16X3+30X4+17X5+30X6+10X7
ST
!Ogranicenja u kapacitetima
2X1+5X2+4X3+25X4+10X5+30X7<=7000
25X2+15X3+20X4+10X6+6X7<=9800
20X2+5X3+2X4+X5+60X7<=3000
X1+4X2+10X3+18X4+20X5+20X7<=6200
5X1+10X6<=3000
!Trzisna ogranicenja
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7=1000
X5+X7>=30

END

GIN 7
```

Slika 54. Izgled ekrana sa matematičkim modelom

```
File  Edit  Solve  Reports  Window  Help

DELETE        X5 AT LEVEL      4
DELETE        X7 AT LEVEL      3
DELETE        X3 AT LEVEL      2
FLIP        X1 TO <=        504 AT     1 WITH BND=    20776.195
SET        X7 TO <=       0 AT     2, BND=  0.2078E+05 TWIN=-0.1000E+31     94
SET        X4 TO <=     186 AT     3, BND=  0.2077E+05 TWIN=-0.1000E+31     96
SET        X3 TO >=     137 AT     4, BND=  0.2077E+05 TWIN= 0.2077E+05    100
SET        X2 TO >=      96 AT     5, BND=  0.2069E+05 TWIN= 0.2076E+05    104
DELETE        X2 AT LEVEL      5
FLIP        X3 TO <=        136 AT     4 WITH BND=    20770.592
SET        X4 TO >=     186 AT     5, BND=  0.2077E+05 TWIN=-0.1000E+31    104
DELETE        X5 AT LEVEL      6
DELETE        X4 AT LEVEL      5
DELETE        X3 AT LEVEL      4
DELETE        X4 AT LEVEL      3
DELETE        X7 AT LEVEL      2
DELETE        X1 AT LEVEL      1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=    19 PIVOTS=     106

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      20759.00

 VARIABLE         VALUE          REDUCED COST
       X1       506.000000        -17.000000
       X2        96.000000        -26.000000
       X3       134.000000        -16.000000
       X4       186.000000        -30.000000
       X5        31.000000        -17.000000
       X6        47.000000        -30.000000
       X7         0.000000        -10.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)        12.000000         0.000000
       3)      1200.000000         0.000000
       4)         7.000000         0.000000
       5)         2.000000         0.000000
       6)         0.000000         0.000000
       7)         0.000000         0.000000
       8)         1.000000         0.000000

NO. ITERATIONS=     106
BRANCHES=   19 DETERM.=  1.000E    0
```

Slika 55. Izgled ekrana sa rešenjem

F-ja cilja:

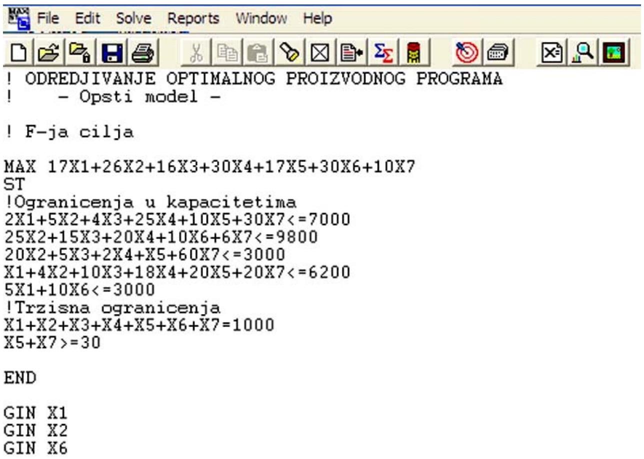
max F(X)=20.759 n.j.

Optimalni plan proizvodnje:

$$X^* = \begin{bmatrix} 506 \\ 96 \\ 134 \\ 186 \\ 31 \\ 47 \\ 0 \end{bmatrix}$$

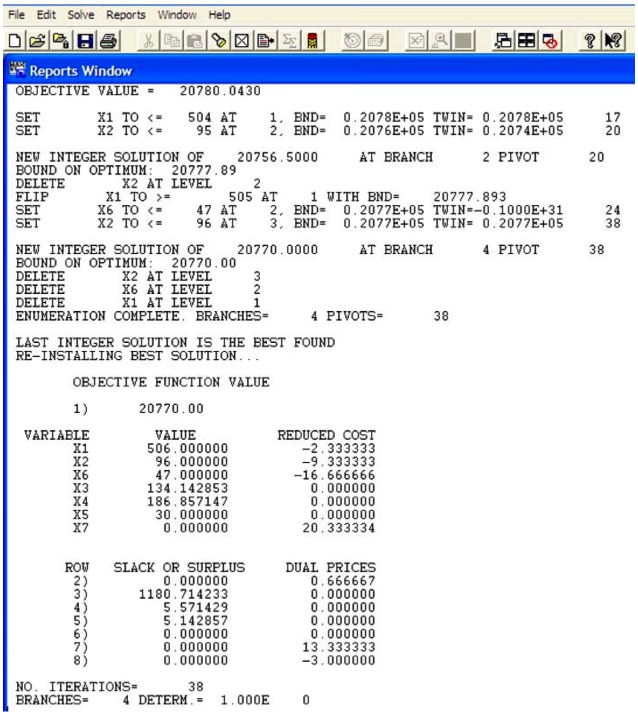
c) Rešenje kada se zahteva da samo neke promenljive (X1, X2 i X6) budu celobrojne

Izgledi ekrana sa postavkom zadatka i rešenjem su dati na slikama 56 i 57.



```
! ODREDJIVANJE OPTIMALNOG PROIZVODNOG PROGRAMA
!     - Opsti model -

! F-ja cilja

MAX 17X1+26X2+16X3+30X4+17X5+30X6+10X7
ST
!Ogranicenja u kapacitetima
2X1+5X2+4X3+25X4+10X5+30X7<=7000
25X2+15X3+20X4+10X6+6X7<=9800
20X2+5X3+2X4+X5+60X7<=3000
X1+4X2+10X3+18X4+20X5+20X7<=6200
5X1+10X6<=3000
!Trzisna ogranicenja
X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7=1000
X5+X7>=30

END

GIN X1
GIN X2
GIN X6
```

Slika 56. Izgled ekrana sa matematičkim modelom



```
Reports Window
OBJECTIVE VALUE =    20780.0430

SET       X1 TO <=    504 AT    1, BND=  0.2078E+05 TWIN= 0.2078E+05     17
SET       X2 TO <=     95 AT    2, BND=  0.2076E+05 TWIN= 0.2074E+05     20

NEW INTEGER SOLUTION OF    20756.5000     AT BRANCH      2 PIVOT      20
BOUND ON OPTIMUM:  20777.89
DELETE       X2 AT LEVEL     2
FLIP        X1 TO >=       505 AT    1 WITH BND=    20777.893
SET       X6 TO <=     47 AT    2, BND=  0.2077E+05 TWIN=-0.1000E+31     24
SET       X2 TO <=     96 AT    3, BND=  0.2077E+05 TWIN= 0.2077E+05     38

NEW INTEGER SOLUTION OF    20770.0000     AT BRANCH      4 PIVOT      38
BOUND ON OPTIMUM:  20770.00
DELETE       X2 AT LEVEL     3
DELETE       X6 AT LEVEL     2
DELETE       X1 AT LEVEL     1
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=     4 PIVOTS=      38

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      20770.00

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1        506.000000        -2.333333
       X2         96.000000        -9.333333
       X6         47.000000       -16.666666
       X3        134.142853         0.000000
       X4        186.857147         0.000000
       X5         30.000000         0.000000
       X7          0.000000        20.333334


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)          0.000000         0.666667
       3)       1180.714233         0.000000
       4)          5.571429         0.000000
       5)          5.142857         0.000000
       6)          0.000000         0.000000
       7)          0.000000        13.333333
       8)          0.000000        -3.000000

NO. ITERATIONS=       38
BRANCHES=    4 DETERM.=  1.000E    0
```

Slika 57. Izgled ekrana sa rešenjem

F-ja cilja:

max F(X)=20.770 n.j.

Optimalni plan : $X^* = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X6 \\ X3 \\ X4 \\ X5 \\ X7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 506 \\ 96 \\ 47 \\ 134{,}142 \\ 186{,}857 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.10. Primena metoda linearnog programiranja

Linearno programiranje je našlo mnoge korisne primene u različitim područjima, pri čemu primenu razvijenih metoda omogućuje i narocito ubrzava razvoj računarske tehnike i programskih rešenja. U ovom poglavlju će se razmatrati prvenstveno formiranje matematičkih modela. Treba imati u vidu da matematicki model odredenog problema, bez obzira na svoju kompleksnost, nikada ne može obuhvatiti sve pojave koje mogu uticati na problem. Modelom se obuhvataju najvažnije i uticaji koji determinišu problem. U rešavanju konkretnih praktičnih problema model se može uvek dopuniti novim ograničenjima i promenljivim. Takodje, veoma je bitna mogućnost vršenja postoptimalne analize. Na zadacima definisanja modela linearnog programiranja treba raditi tim specialista, koji dobro poznaje prirodu problema koji se rešava i matematičke metode kojima se odreduje optimalno resenje problema.

2.10.1. Optimalni program proizvodnje

Sastaviti optimalni program proizvodnje znači izabrati, izmedu velikog broja proizvoda, onaj asortiman proizvoda koji ce obezbediti maksimalne ekonomske efekte u uslovima tržišnih i proizvodnih (resursnih) ograničenja.

Za konstrukciju matematičkog modela proizvodnje potrebno je pripremiti podatke o proizvodnim kapacitetima, o normativima utrošaka resursa (proizvodni resursi, mašine, ljudi, materijali, polufabrikati) po jedinici svakog proizvoda, o ekonomskim efektima (dobiti) koje obezbedjuje svaki proizvod, o eventualnim ograničenjima koja postavlja tržište, itd.

Neka preduzeće proizvodi n razlicitih tipova proizvoda: P_1 P_2, . . . , P_n, za čiju proizvodnju se koristi m različitih mašina, r različitih kategorija radnika i g različitih vrsta sirovina, čije su količine ograničene. Takodje je poznata dobit koja se ostvaruje po jedinici svakog proizvoda. Zadatak je da se programira proizvodnja, kako bi se dobit u razmatranom periodu maksimizirala.

U matematičkom modelu će se koristiti sledeće oznake:

- x_j*(kom)* – količina j-tog proizvoda koju treba proizvesti u razmatranom periodu, nepoznata koju treba odrediti,
- c_j *(n.j./kom)* - dobit po jedinici j-tog proizvoda,
- a_{ij} *(v.j/kom)* - vreme koje je potrebno da se na i-toj mašini proizvede
- jedinica j-tog proizvoda;
- a_{i0} *(v.j)* - kapacitet *i-te* mašine izražen u vremenskim jcdinicama;
- b_{kj} - vreme potrebno radniku *k-te* kategorije da obradi. odnosno
- proizvede, jedinicu j-tog proizvoda;
- b_{ko} – raspoloživi fond radnog vremena radnika *k- te* kategorije;
- s_{Vj} - kolicina *v-te* sirovine koja je potrebna za proizvodnju jedinice *j* tog proizvoda;
- s_{v0} - raspoloživa količina *v-te* vrste sirovine;
- e_j - količina j-tog proizvoda koja se može prodati na tržištu.

Matematički model problema je:

Funkcija cilja:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \bullet x_j \text{ - maksimalna dobit,} \qquad (44)$$

Ograničenja:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j \le a_{i0},..i = 1,2,3,....,m \\
&\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \bullet x_j \le b_{k0},..k = 1,2,3,....,r \\
&\sum_{j=1}^{n} s_{vj} \bullet x_j \le s_{v0},..v = 1,2,3,....,g \\
&x_j \le e_{j,...} j = 1,2,3,.....n
\end{aligned} \qquad (45)$$

Funkcija kriterijuma se može i drugačije formulisati, tako da daje maksimalnu vrednost proizvodnje, maksimalnu produktivnost rada, maksimalno korišćenje kapaciteta, itd. Treba naglasiti da je dobijeno rešenje optimalnu u uslovima zadatog seta ograničenja.

2.10.2. Optimizacija utroška materijala

Kod nekih industrijskih grana, u okviru pripreme proizvodnje, sečenjem, krojenjem, proizvode se odredjene količine proizvoda i odredjene količine otpada. Količina otpadaka zavisi od dimenzija korišćenog materijala, od oblika i dimenzija delova koje treba pripremiti, kao i od izabranog načina obrade materijala. Funkcija cilja se može postaviti tako da se u fazi pripreme minimizira otpadak, odnosno, da se odredi optimalni utrošak materijala koji obezbeduje ostvarenje odredene proizvodnje uz najmnanji ukupni otpadak.

Matematički model će biti uradjen pod sledećim pretpostavkama:

- ✓ preduzece treba da proizvede *m* ra-zlicitih delova u odredenim kolicinama,
- ✓ za proizvodnju tih delova koristi se materijal istih dimenzija.

Broj varijanti za obradu materijala unapred je poznat, a isto tako poznata je količina otpadaka koja se javlja pri svakoj varijanti, kao i količina pojedinih delova koja se dobija obradom jedinice materijala po svakoj varijanti. Ako se zna da se iz jedinice materijala datih dimenzija dobija *k* delova, onda je broj varijanti obrade materijala jednak $\binom{m}{k}$.

U matematičkog modelu će biti korišćene sledeće oznake:

- x_j - količina materijala odredjene dimenzije koja ce biti obradjena po j-toj varijanti;
- a_j - količina otpadaka od jedinice datog materijala koji je obradjen po *j-toj* varijanti;
- a_{ij} - kolicina delova *i-te* vrste koja se dobija od jedne jedinice materijala obradenog po j-toj varijanti;
- b_i - ukupna kolicina i-tog dela koju treba obezbediti za proizvodnju;
- s - raspoloziva kolicina datog materijala.

Funkcija cilja:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \bullet x_j \text{ - minimalna količina otpada,} \quad (46)$$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j = b_i ,..i = 1,2,3,....,m \\ &\sum_{j=1}^{n} x_j \leq s, \qquad (47) \\ &x_j \geq 0,....j = 1,2,3,.....n \end{aligned}$$

2.10.3. Sastav mešavine

Problemi sastava mešavine se mogu javiti u metalurgiji, neorganskoj tehnologiji, ali i u drugim privrednim sektorima. Problem izbora sastava mešavine je u sledecem: Od više vrsta sirovina se proizvodi jedan proizvod. U sirovinama (polufabrikatima) se nalaze razni elementi. Ti elementi svojim prisustvom odreduju kvalitet gotovog proizvoda. Pri ovome može biti zadata minimalna (recimo za korisne elemente), odnosno maksimalna (recimo za štetne elemente) količina nekih elemenata u gotovom proizvodu. Sirovine koje se koriste za proizvodnju nabavljaju se po različitim cenama, pa se problem svodi na odredivanje količina pojedinih sirovina koje ce biti utrošene za proizvodnju gotovog proizvoda traženog kvaliteta, ali tako da troškovi nabavke sirovina budu minimalni.

Problem postaje složeniji ako se iz više različitih sirovina proizvodi više različitih proizvoda.

Prvi slučaj: Proizvodnja jednog proizvoda od više sirovina

Polazne pretpostavke:

- ✓ za dobijanje gotovog proizvoda koristi se n vrsta sirovina;
- ✓ gotov proizvod mora da sadrži m raznih elemenata u odredenim količinama;
- ✓ treba proizvesti ukupno b jedinica gotovog proizvoda;
- ✓ poznate su nabavne cene pojedinih sirovina.

U matematičkom modelu će biti korišćeni sledeći simboli:

- x_j - kolicina j-te sirovine koja ce se utrositi za proizvodnju *b* jedinica gotovog proizvoda;
- p_j - nabavna cena jedinice *j-te* sirovine;
- a_{ij}- kolicina *i-tog* elementa u jedinici *j-te* sirovine;
- a_{I0} - propisana (minimalna ili maksimalna) kolicina i-tog elementa u gotovom proizvodu:
- b - kolicina gotovog proizvoda koju treba proizvesti;
- s_j - dozvoljena kolicina *j-te* sirovine u gotovom proizvodu.

Funkcija cilja:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \bullet x_j \text{ - minimalni troškovi nabavke,} \qquad (48)$$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j = a_{i0},..i = 1,2,3,....,m \\ &\sum_{j=1}^{n} x_j = b, \\ &x_j \le s_j,....j = 1,2,3,.....n \end{aligned} \qquad (49)$$

Ako je sadržina pojedinih elemenata u sirovinama i dozvoljena sadržina elemenata u gotovom proizvodu izražavaju u procentima, značenje pojedinih simbola je sledeće:

- x_j - koeficijent ucešća j-te sirovine u jedinici gotovog proizvoda;
- p_j - nabavna cena jedinice j-te sirovine;
- a_{ij} - procenat i-tog element koji se sadrži u jedinici j-te sirovine;
- a_{i0} - dozvoljeni procenat ucesca *i-tog* element a u jedinici gotovog proizvoda;
- s_j - dozvoljeni koeficijent ucešća j-te sirovine u jedinici gotovog proizvoda.

Matematički model sada postaje:

Funkcija cilja:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \bullet x_j \text{ - minimalni troškovi nabavke,} \quad (50)$$

Ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j = a_{i0}, .. i = 1,2,3,...., m$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad (51)$$
$$x_j \leq s_j, ... j = 1,2,3, ...n$$

Drugi slučaj: Od više sirovina se proizvodi više proizvoda

Polazne pretpostavke:

- ✓ za proizvodnju se mogu koristiti *m* razlicitih sirovina S_1, S_2, … S_m;
- ✓ iz ovih sirovina preradorn se dobija *n* raznih proizvoda P_1, P_2,. . . . P_n;
- ✓ poznati su normativi ucešća svake sirovine u gotovim proizvodima;
- ✓ poznate su nabavne cene sirovina;
- ✓ poznate su prodajne cene gotovih proizvoda;
- ✓ u proizvodnji nema nikakvih otpadaka i rastura, pa se gotov proizvod može iskazati i količinom sirovina upotrebljenih za njegovu proizvodnju.

Zadatak problema LP se svodi na odredivanje količina svake sirovine koje će se upotrebiti za dobijanje svih proizvoda, a da se pri tome ostvari najveća dobit, odnosno, najveća razlika izmedu prihoda od prodaje gotovih proizvoda i izdataka za nabavku sirovina.

U matematičkom modelu se koriste sledeće oznake:

- x_{ij} - kolicina i-te sirovine upotrebljene za *j-ti* proizvod;
- a_i - kolicina *i-te* sirovine potrebne za ukupnu proizvodnju
- g_i – raspoloživa količina *i-te* sirovine;
- p_i - nabavna cena jedinice *i-te* sirovine;

- b_j – količina j-tog proizvoda prema optimalnom resenju;
- w_j – količina *j-tog* proizvoda koja se može prodati na trzistu;
- c_j - prodajna cena jedinice j-tog proizvoda;
- q_{ij} - koeflcijent ucesca i-te sirovine u jedinici j-tog proizvoda,

Pri prethodnom vaše i sledeće relacije:

$$0 < q_{ij} < 1;..\sum_{i=1}^{m} q_{ij} = 1;..q_{ij} = \frac{x_{ij}}{b_j} \tag{52}$$

Problem odredjivanja optimalne mešavine može se pretstaviti i tabelarno (tabela 4), što u mnogome problem čini preglednimi olakšava formiranje matematičkog modela.

Tabela 4. Tabelarna predstava problema odredjivanja optimalne smeše

Sirovine	Proizvodi				Kolicina i-te sirovine	Cena i-te sirovine	Raspoloziva kolicina i-te sirovine
	P_1	P_2	…	P_n			
S_1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	a_1	p_1	g_1
S_2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2n}	a_2	p_2	g_2
.					….	…	…..
.	…	…	…	….			
S_m	x_m	x_{m2}		x_{mn}	a_m	p_m	g_m
Kolicina j-tog proizvoda	b_1	b_2		b_n			
Cena	c_1	c_2	…	c_n			
Mogući plasman	w_1	w_2	….	w_n			

U ovom slučaju se javljaju dve grupe nepoznatih, i to: nepoznate količine pojedinih sirovina potrebne za proizvodnju i nepoznate količine gotovih proizvoda, odnosno, nepoznat je optimalni proizvodni plan. Medjutim, nepoznata količina proizvoda b_j koja će ući u optimalni plan proizvodnje se može iskazati kao:

$$b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij},..j = 1,2,....n \tag{53}$$

Nepoznata količina i-te sirovine, koja se treba nabaviti prema optimalnom proizvodnom planu je:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij},..i = 1,2,....m \tag{54}$$

Matematički model problema se sada može formulisati kao:

Funkcija cilja:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \bullet b_j - \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet a_i \tag{55}$$

Kada se izvrše gore navedene zamene, dobija se konačni oblik funkcije cilja, kao:

$$maF(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_j \bullet x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i \bullet x_{ij} \tag{56}$$

Ograničenja:

Prva grupa ograničenja- raspoložive količine sirovina:

$$\begin{aligned} & b_j \le w_j \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le w_j,..i = 1,2,....n \end{aligned} \tag{57}$$

Druga grupa ograničenja – mogućnost plasmana na tržištu:

$$\begin{aligned} & a_i \le g_i \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le g_i,..i = 1,2,....m \end{aligned} \tag{58}$$

Treća grupa ograničenja – strukturna ograničenja, odnosno ograničenja koja odedjuju učešće i-te sirovine u j-tom proizvodu:

$$\begin{aligned} & x_{sj} = q_{sj} \bullet b_j ...(i = s,..s - ta..sirovina,.j = 1,2,.....n, \\ & x_{sj} = \sum_{i=1}^{m} q_{sj} \bullet x_{ij},..j = 1,2,.....n \\ & (1 - q_{sj}) \bullet x_{sj} - \sum_{i \ne s}^{m} q_{sj} \bullet x_{ij} = o,..j = 1,2,.....n \end{aligned} \tag{59}$$

2.10.4. Upravljanje zalihama

Sledeći model se može primeniti kod preduzeća sa sezonskom potražnjom proizvoda. Sigurno je da se kapacitet preduzeća (proizvodnih linija) ne može uvek prilagodjavati sezonskim varijacijama u tražnji, pa se javlja potreba za odredjivanjem optimalnih rešenja za kraće periode od godinu dana, pri čemu se moraju izmiriti suprotni zahtevi. Prilagodavanje obimna proizvodnje tražnji nije uvek moguće, zbog instalisanih kapaciteti mašina, a u slučaju izbora većih kapaciteta, postavlja se pitanje nejednakog korišćenje kapaciteta preduzeća u pojedinim periodima (odnosno, malo iskorišćenje u vansezoni). Sve ovo utice na stvaranje zaliha gotovih proizvoda. Matematički model treba da na osnovu poznatih kapaciteta mašina i tražnje za gotovim proizvodima u pojedinim periodima, odredi takav program proizvodnje po periodima, koji će obezbediti najniže troškove skladištenja gotovih proizvoda.

Neka razmatrano preduzeće može da proizvodi *n* proizvoda, za čiju proizvodnju koristi *m* različitih mašina, za koje je poznat kapacitet po periodima, i da će se razmatrati *s* vremenskih perioda.

U modelu će se koristiti sledeći simboli:

x_j^k- - obim proizvodnje ./-tog proizvoda u k:-tom periodu,

t_j - troskovi skladištenja jedinice *j-tog* proizvoda,

a_{ij} - vreme potrebno da se na i-toj mašini proizvede jedinica *j*—tog proizvoda,

a^k_{i0} - kapacitet i'-te mašine u *k*-tom periodu,

w^k_j - potražnja za j-tim proizvodom u *k-tom* periodu,

Matematički model problema je:

Funkcija cilja – minimalni troškovi skladištenja:

$$\min F(X) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} t_j \bullet (x_j^k - w_j^k) \tag{60}$$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j^k \le a_{i0}^k ;..i = 1,2,.....m;..k = 1,2,.....s \\ &x_j^k \ge w_j^k ;....j = 1,2,.....n;..k = 1,2,.....s \end{aligned} \tag{61}$$

2.10.5. Optimalno proširenje kapaciteta

U proizvodnim postrojenjima se često javljaju takozvana „uska grla”, koja mogu biti posledica grešaka pri projektovanju ili kao posledica promene uslova tokom eksploatacije (promena zahteva sa tržišta). Uska grla mogu biti pojedine mašine, pogoni, faze i slično. Mašine koje predstavljaju usko grlo su potpuno iskorišćene, ali one svojim ograničenim kapacitetima obaraju iskorišćenje mašina ispred i iza. U ovakvim slučajeviina najčešć je potrebno dodatnim ulaganjima ukloniti „uska grla”, odnosno, uskladiti proizvodne kapacitete.

Pretpostavka je da se i posle proširenja kapaciteta ne menja tehnologija proizvodnje. To znači da se proširenje kapaciteta vrši nabavkom izvesnog broja istih (ili veoma sličnih) mašina. Problem se sastoji u odredjivanju broja mašina za optimalno proširenje kapaciteta, odnosno, za proširenje kojim se obezbedjuje optimalni proizvodni program.

U modelu se ponovo javljaju dve vrste nepoznatih i to:

- broj mašina koje treba nabaviti za proširenje kapaciteta, i
- količine gotovih proizvoda koje će se proizvoditi prema optimalnom resenju.

Ograničenja su data kao:

- kapaciteti mašina,
- raspoloživa investiciona sredstva, i
- raspoloživi gradjevinski objekti (odnosno raspoložive radne površine za montažu novih mašina).

Za konkretne probleme, model se može proširiti i drugim ograničenjima.

U modelu će se koristiti sledeći simboli:

x_j - kolicina j-tog proizvoda koju treba proizvesti;

y_i - broj mašina i-te vrste koji treba nabaviti radi proširenja kapaciteta;

c_j - dohodak (ili dobit) po jedinici j-tog proizvoda;

b_i - godisnja amortizacija jedne *i-te* mašine;

a_{i0} — vreme koje je potrebno da se na i-toj mašini proizvede jedinica j-tog proizvoda;

a_i - godišnji kapacitet jedne mašine i-te vrste;

p_i - potrebna radna površina za jednu mašinu i-te vrste;

P -raspoloziva radna. povrsina za prosirenje kapaciteta;

v_i - nabavna vrednost jedne mašine i-te vrste;

K - raspoloživa investiciona sredstva.

Matematicki model problema se sasstoji od funkcije cilja i ograničenja.

Funkcija cilja, čija se maksimalna vrednost traži:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \bullet x_j - \sum_{i=1}^{m} b_i \bullet y_i \qquad (62)$$

Funkcija kriterijuma označava maksimalni dohodak od realizacije proizvoda (proizvedenih pomoću postojećeg i proširenog kapaciteta) umanjen za troškove amortizacije novih masina.

Ograničenja:

- nedostatak proizvodnih kapaciteta:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j - a_i \bullet y_i \leq a_{i0},..za...i = 1,2,...m \qquad (63)$$

- ograničena investiciona sredstva:

$$\sum_{i}^{m} v_i \bullet y_i \leq K \qquad (64)$$

- ograničen prostor za instalaciju mašina:

$$\sum_{i}^{m} p_i \bullet y_i \leq P \qquad (65)$$

Dodatni uslovi su:

$$\begin{aligned} & x_j \geq 0,..za..j = 1,2,...,n, \\ & y_i \geq 0,..za..i. = 1,2,...,m \\ & y_i - celobrojna..vrednost \end{aligned} \qquad (66)$$

Zahtev da promenljive y_i, budu celobrojne proizilazi iz prirode samih promenljivih, tako da je ovaj problem spada u grupu problema celobrojnog programiranja.

2.10.6. Problemi ishrane

Problemi se odnose na izbor životnih namirnica za ljudsku ishranu (definisanje obroka), odnosno na izbor stočne hrane za ishranu stoke. Ovi problemi spadaju medju prve koji su rešavani metodama linearnog programiranja. Problemi su slični, pa se za njihovo resavanje koriste isti matematički modeli. Primena ovih modela u stočarstvu je daleko razvijenija, naročito u industrijskoj proizvodnji krmih smeša, da se i problem izdvaja i rešava kao problem krmnih smeša.

- Problem se sastoji u sledećem: kako sačiniti program ishrane većeg broja istorodne stoke (iste vrste i iste starosne grupe) tako da izabrana hrana sadrži u dovoljnoj količini sve vrste neophodnih hranljivih sastojaka, a da izdaci za hranu budu minimalni. Savremena stočarska proizvodnja toliko je napredovala da može precizno formulisati brojne zahteve proizvodjačima stočne hrane, koji se svode na:
- Sastavljanje obroka je specifično za svaku vrstu stoke, s tim što obrok mora odgovarati biološkim potrebama organizma i mogućnostima iskorišćavanja hrane.
- Pri sastavljanju obroka poznate su kvantitativne potrebe stoke za pojedinirn hranljivim sastojcima. Kod odredivanja ovih potreba veoma je važno da jedan broj hranljivih sastojaka organizarn životinja ne može sam izgraditi, već ih mora dobiti isključivo preko hrane.
- hranljivi sastojci imaju razlicite funkcije: služe za proizvodnju energije, za stvaranje novih telesnih materija, za obavljanje bioloskih funkcija u organizmu, itd.Pored toga, neki dodaci hrani mogu da obezbede postizanje naročitih učinaka u ishrani stoke time sto ce poboljšati hranljivu vrednost hrane, poboljšati iskorišćavanje drugih sastojaka hrane, sto će zaštitno delovati protiv bolesti stoke, što će produžiti trajnost hrane itd.
- Moraju se poznavati sastavi pojedinih elemenata hrane koja će se koristiti u obroku. Jedino tako je moguće učiniti takav izbor i kombinaciju hraniva koji ce obezbediti sve ove zahteve.

Ovaj problem predstavlja zapravo tipičan problem traženja minimuma.

Matematički model se formira pod sledećim pretpostavkama:

- za pripremu krmne smeše mogu se koristiti *n* vrsta hraniva,
- poznate su količine *m* vrsta hranljivih sastojaka koje dnevni obrok mora da sadrži,
- poznate su količine pojedinih hranljivih sastojaka sadržane u jedinici svakog hraniva,
- tržišna cena jedinice hraniva.

U modelu se koriste sledeći simboli:

x_j – količina j-tog hraniva koja će se upotrebiti za dnevni obrok jednog grla stoke;

p_j - nabavna cena jedinice j-tog hraniva;

a_{ij}- kolicina i-tog hranljivog sastojka u jedinici j-tog hraniva;

a_{i0} - propisana kolicina i - tog hranljivog sastojka koju jedno grlo stoke mora da unese u organizam za jedan dan;

q_j - dozvoljena kolicina j-tog hraniva u jednom obroku za jedno grlo stoke.

Matematičko model iznalaženja minimuma se sastiji od funkcije cilja i ograničenja.

Funkcija cilja:

$$\min F(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j \bullet x_j \qquad (67)$$

Ograničenja:

- minimalna propisana kolicina i - tog hranljivog sastojka koju jedno grlo stoke mora da unese u organizam za jedan dan:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j \geq a_{i0} \qquad (68)$$

- maksimalno dozvoljena kolicina j-tog hraniva u jednom obroku za jedno grlo stoke:

$$0 \leq x_j \leq q_j \qquad (69)$$

2.10.7. Primena linearnog programiranja u poljoprivredi

Metode i modeli LP se mogu primeniti u industriji koja preradjuje poljoprivredne proizvode, u stočarskoj proizvodnji, kod problema regionalnog razmeštaja i specijalizacije poljoprivredne proizvodnje.

Ovde će se obraditi model za programiranje poljoprivredne proizvodnje sa stanovišta raspodele obradive površine na pojedine kulture, a radi ostvarenja maksimalne dobiti.

Model je po strukturi sličan modelu za odredivanje optimalnog proizvodnog programa, sa sledećim karakterističnostima:

- izrazito sezonski karakter poljoprivredne proizvodnje, koji se mora izraziti u modelu,
- drugacije značenje promenljivih u modelu, gde se kao ograničenja javljaju kapaciteti sledećih resursa:
  - zemlja (raspoloziva obradiva povrsina),
  - poljoprivredne masine,
  - radna snaga,
  - seme, veštačko djubrivo i zaštitna sredstva.

Za formiranje matematičkog modela polazi se od sledećih pretpostavki:

- poljoprivredno dobro raspolaze sa *h* hektara obradive površine,
- na toj površini se može zasejati *n* vrsta poljoprivrednih kultura,
- raspolaze sa *m* vrsta poljoprivrednih mašina,
- za proizvodnju koristi *g* vrsta semena, zastitnih sredstava i dubriva,
- poznati su prosečni prinosi svih poljoprivrednih kultura po jednom hektaru,
- poznate su prodajne cene po jedinici svake kulture, i
- direktni troškovi obrade jednog hektara pod odredenom kulturom.

Zadatak modela je da odredi na kojoj površini treba zasejati svaku od poljoprivrednih kultura da bi se ostvario maksimalni dobit.

U modelu se koriste sledeći simboli:

x_j - broj hektara na kojima ce biti zasejana j-ta poljoprivredna kultura;

q_j - prosecni prinos *j-te* kulture po jednom hektaru;

p_j - prodajna cena po jedinici *j-te* kulture;

t_j - direktni troskovi obrade jednog hektara pod *j-tom* kulturom;

a_{ij} - vreme potrebno i-toj poljoprivrednoj mašini za obradu jednog hektara pod j-tom kulturom;

a_{i0}^{k} - raspolozivo vreme rada *i-te* poljoprivredne mašine u k—toj sezoni;

$b^{k}j$ - broj radnika koje treba angazovati u k-toj sezoni po jednom hektaru pod *j-tom* kulturom:

$b^{k}{}_{o}$ - broj radnika sa kojima raspolaže poljoprivredno dobro za k-tu sezonu;

s_{vj} - količina v-tog materijala (semena, zastitnog sredstva, vestackog dubriva) potrebna po jednom hektaru pod j-torn kulturom;

s_{v0} - raspoloziva kolicina v-tog materijala;

h - raspoloživa obradiva površina u hektarima;

$\underline{h}_{j}$ - minimalna površina pod j-tom kulturom;

h_{j} - maksimalna povrsina pod j-tom kulturom.

Funkcija cilja modela, koja obezbedjuje maksimizaciju dobiti je:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} (q_j \bullet p_j - t_j) \bullet x_j \tag{70}$$

Ograničenja:

- raspoloživost mehanizacije u svakoj k-toj sezoni:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet x_j \le a_{i0}^{k};..i = 1,2,...,m;..k = 1,2,...,r \tag{71}$$

- raspoloživ broj radnika u svakoj k-toj sezoni:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^k \bullet x_j \le b_0^k;...k = 1,2,...,r \tag{72}$$

- raspoloživa količina potrebnog materijala (seme, djubrivo):

$$\sum_{j=1}^{n} s_{vj} \bullet x_j \le s_{v0};..v = 1,2,...,g \tag{73}$$

- raspoloživa površina i zahtevi za min., odnosno max. površinama:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = h \tag{74}$$

$$\underline{h}_j \le x_j \le \overline{h}_j \tag{75}$$

3.0. NELINEARNO PROGRAMIRANJE

Nelinearno programiranje spada u grupu determinističkih metoda rešavanja jedne velike klase statičkih upravljačkih zadataka. Svaki upravljački zadatak kod koga je funkcija cilja *F(X)* i/ili skup ograničenja *L* definisan nelinearnim zavisnostima (funkcija cilja nelinearnom funkcijom, a ograničenja nelinearnim algebarskim jednačinama ili nejednačinama), svodi se na zadatak nelinearnog programiranja, čije se optimalno rješenje pronalazi nekom od pogodnih metoda, a koja je najadekvatnija za pronalaženje konkretnog rešenja.

Zadaci NP se ne mogu rešavati primenom neke univerzalne metode, kao što je Simplex metoda LP, već se za svaki konkretni problem, u zavisnosti od njegovog matematičkog modela i stepena i vrste nelinearnosti definiše nova metoda ili prilagodjava neka od postojećih. Tako na primer postoje specijalne metode za zadatke NP sa linearnim ograničenjima, za zadatke sa kvadratnim oblikom funkcije cilja, za celobrojne vrenosti promenljivih itd.

Nelinearno programiranje (NP) pokriva znatno šire područje od linearnog programiranja, pa se može reći i da je LP specijalni slučaj NP. Valja istaći da mnogi zadaci NP nisu još rešeni.

3.1. Postavka zadatka

Opšta formulacija zadatka NP se iskazuje na sledeći način:

Naći vrednost n-dimenzionalnog vektora

$$X = (x_1, x_2, \dots x_n) \tag{76}$$

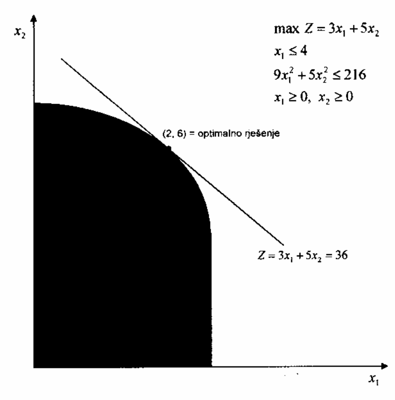
za koju funkcija cilja F(X) dobija ekstremnu vrednost (minimum ili maksimum), pri zadatim kriterijumima

$$G(X) \leq 0;..X \geq 0 \tag{77}$$

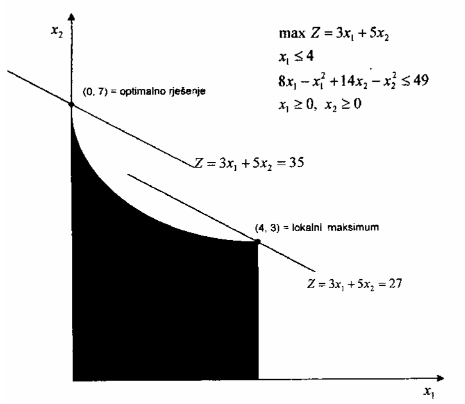
Teškoće koje se javljaju u problemima NP upravo potiču od prisustva nelinearnosti. Dve osnovne grupe problema su: problemi sa nelinearnim ograničenjima i linearnom funkcijom cilja, i problemi sa linearnim ograničenjima i nelinearnom funkcijom cilja.

3.2. Grafička prezentacija

Grafička predstava problema NP sa linearnom funkcijom cilja i nelinearnim ograničenjima je data na slici 58. Osenčena oblast predstavlja moguća rešenja.



a)

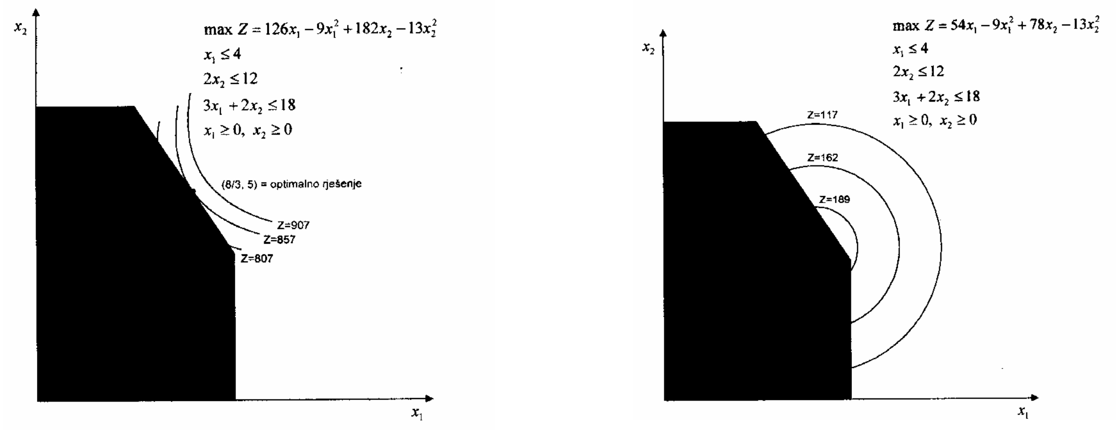


b)

Slika 58. NP sa lineranom funkcijom cilja i nelinearnim ograničenjima

Očigledno je da funkcija ograničenja sa slike 6.b nije konveksna, odnosno nije ispunjen uslov da linija koja spaja bilo koje dve tačke iz skupa mogućih rešenja takodje pripada ovom skupu.

Primer problema NP sa nelinearnom funkcijom cilja i linearnim ograničenjima je dat na slici 59.



Slika 59. NP sa nelineranom funkcijom cilja i linearnim ograničenjima

3.3. Klasifikacija rešivih zadataka NP

Sledeća klasifikacija ističe rešive probleme NP i njihovu opštu formulaciju.

a) NP sa linearnim skupom ograničenja

Opšti oblik funkcije cilja i ograničenja je:

$$
\begin{aligned}
&F(X);..X(x_1,...x_n)\\
&g_i : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j \le b_i;..(i = 1,2,...m) \qquad (78)\\
&x_j \ge 0,..(j = 1,2,...n)
\end{aligned}
$$

b) NP sa separabilnom funkcijom cilja F(X)

Funkcija cilja je definisana zbirom n-funkcija, koje su zavisne od samo jedne promenljive. Oblik separabilne funkcije cilja je:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \qquad (79)$$

c) Kvadratno programiranje

U ovom slučaju ograničenja $g_i(x)$ su linearne funkcije, dok je funkcija cilja kvadratna, to jest:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} * x_i y_j \tag{80}$$

d) Celobrojno programiranje

Ovu klasu sačinjavaju zadaci, koji pored ostalih uslova zadovoljavaju i poseban uslov da promenljive mogu imati samo celobrojne vrednosti.

3.4. Metode rešavanja

3.4.1. Kuhn - Tuckerova metoda

Kuhn - Tuckerova metoda zasniva se na teoremi Kuhn-Tucker-a koja se u literaturi često pominje i pod imenom *teorema o sedlastoj tacki*. Ona zauzima centralno mesto u teoriji konveksnog programiranja i predstavlja uopstenje klasične metode Langrange-ovih multiplikatora. Ova teorema omogucava pronalaženje ekstremne vrednosti funkcije vise promjenljivih, pri skupu ograničenja koja su zadana linearnim jednačnama. Kuhn-Tucker-ova teorema proširuje predhodni metod na pronalaženje ekstremne vrednosti funcije viš promjenljivih, pri ograničejima koja mogu biti i nejednačine.

Teorema Kuhn-Tucker-a daje potreban i dovoljan uslov koji mora ispunjavati vektor $X=X^*$ koji predstavlja rešenje zadatka. Kriterijumi se postavljaju i proveravaju na bazi uopštene Lagrange-ove funkcije $\Phi(X, \Lambda)$. Da bi se formirala ova funkcija uvode se m novih promenljivih, koji se inače nazivaju Lagrange-ovi množitelji (multiplikatori), i koji se označavaju sa λ_1, λ_2, . . ,λ_m. Sada se Lagrange-ova funkcija, koja je zavisna od n+m promenljivih može napisati kao:

$$\Phi(X, \Lambda) = F(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 g_i(X) \tag{81}$$

Kuhn-Tucker-ova teorema se može definisati kao:

Vektor $X=X^*$ predstavlja rešenje zadatka NP, tada i samo tada kada postoji vektor $\Lambda=\Lambda^*$ takav da je:

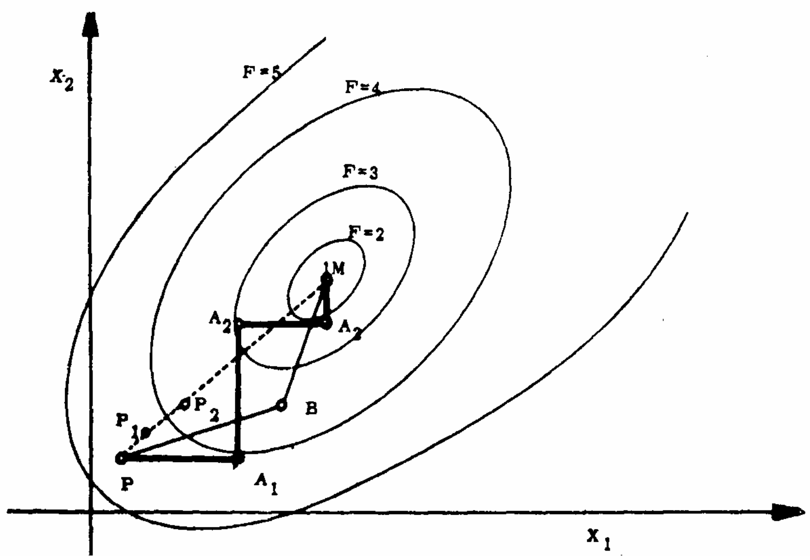
$$X^* \geq 0;...\Lambda^* \geq 0 \tag{82}$$

$$\begin{gathered}\Phi(X^*,\Lambda) \leq \Phi(X^*,\Lambda^*) \leq \Phi(X,\Lambda^*) \\ za..\forall X \geq 0,..\Lambda \geq 0\end{gathered} \tag{83}$$

Pod ovim uslovima funkcija Φ u tački (X^*, Λ^*) mora imati globalni minimum u oblasti X>=0 u odnosu na X i globalni maksimum u oblasti Λ>=0 u odnosu na Λ. Drugim rečima, tačka sa koordinatama (X^*, Λ^*)predstavlja nenegativnu sedlastu tačku za funkciju Φ. Kao i za ostale probleme matematičkog programiranja i optimizacije, razvijen je čitav niz računarskih algoritama i programa za probleme nelinearnog programiranja Kuhn-Tucker-ovom metodom.

3.4.2. Gradijentna metoda

U cilju lakšeg razumevanja, koncepcija gradijentne metode je izložena na primeru odredjivanja minimuma funkcije sa dve nezavisno promenljive. Da bi procedura bila što jednostavnija, pretpostavlja se da se minimizacija funkcije F(X) = F(x_1, x_2) vrši u odsustvu skupa ograničnja (L), odnosno, da je funkcija za bilo koje veličine x_1 i x_2 u oblasti ograničenja. Zadana funkcija F = F(x_1, x_2) je prikazana na slici 11, a u ravni (x_1, x_2). Minimum funkcije F(x_1, x_2) odrediće se nekom vrstom pretraživanja po domenu njene definisanosti u ravni (x_1, x_2), kao što je prikazano na slici 60.



Slika 60. Grafička interpretacija gradijentne metode

Ako se zna da su funcija $F(x_1, x_2)$ i njeni parcijalni izvodi po x_1, x_2 neprekidne funkcije, postavljeni problem može se rešiti pretraživanjem rešenja duž neke linije, duž koje je totalni priraštaj funkcije stalno negativan. Na sl. 4.2 nacrtane su tri takve linije P – A_1 – A_2 – A_3 – M, P-B-M i P – M. Algoritam za pretraživanje rešenja duž linije P-A_1-A_2-A_3-M sastoji se u sledećem:

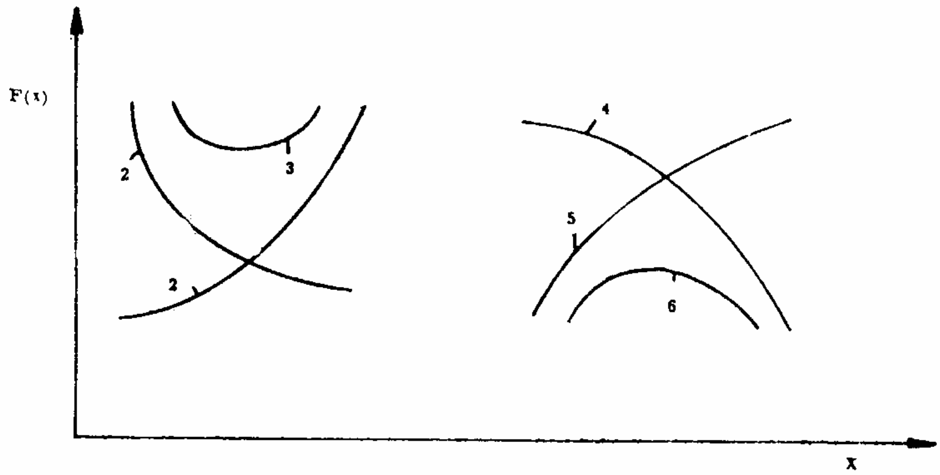
Najpre se u polaznoj tački P odredjuje parcijalni izvod funkcije $F(x_1, x_2)$ po promenljivoj x_1 i kada se konstatuje da je negativan, onda se pretraživanje (kontinualni ili diskretno) vrši duž prave P – A_1, pri čemu je x_2 = const., a x_1 raste sve dok funkcija $F(x_1, x_{2p})$ opada, tj. do tačke A_1. Zatim se u tački A_1 odredjuje parcijalni izvod funkcije $F(x_1, x_2)$ po x_2, pa pošto je negativan, pretraživanje se nastavlja duž prave A_1 – A_2 sve dok funkcija $F(x_{1\,A1}\, x_2)$ opada, tj. do tačke A_2, itd. Ova pretraživanja duž prave paralelne osi x_1, a zatim duž prave paralelne osi x_2 nastavljaju se naizmenično, sve dok se kooridnate minimuma funkcije $F(x_1, x_2)$ ne odrede sa proizvoljnom tačnošću.

Druga mogućnost sastoji se u pretraživanju minimuma (maksimuma) funkcije $F(x_1, x_2)$ duž linije najvećeg pada (uspona). Za posmatrani primer minimizacije funkcije $F(x_1, x_2)$, linija najvećeg pada je P – M (slika 9). Algoritam za takvo pretraživanje polazi od odredjivanja smera najvećeg pada funkcije $F(x_1, x_2)$ u tačku P koji je suprotan pravcu gradijenta funkcije, a zatim se vrši elementarni pomeraj u tom smeru do susedne tačke P_1, u kojoj se takodje odredjuje smer najvećeg pada kao u tački P.

Dalji postupak se nastavlja vršeći elementarni pomeraj iz tačke P_1 u P_2, i sve tako dok se ne dobije minimum funkcije $F(x_1, x_2)$. Drugim rečima, ovaj postupak ponavlja se sve dok funkcija $F(x_1, x_2)$ ne prestane da opada. Izračunavanje gradijentne funkcije F(X) predstavlja obiman i zametan posao, pa je sa računaskog aspekta jednostavnije da se to izračunavanje vrši povremeno, što se efikasno koristi u modifikovanim metodama gradijenta. Pretraživanje vrednosti funkcije $F(x_1, x_2)$ korišćenjem ove metode pokazano je na slici 9 linijom P-B-M. U tom slučaju algoritam se sastoji u sledećem:
Prvo se odredjuje smer najvećeg pada u polaznoj tački P, a zatim se pretražuju vrednosti duž prave P -–B koja je kolinearna sa pravcem gradijenta funkcije u tački P i to sve dok funkcija $F(x_1, x_2)$ opada, tj. do tačke B. Posle toga odredjuje se smer najvećeg pada funkcije u tački B i pretraživanje se nastavlja duž prave koja polazi iz tačke B, a kolinearna je sa pravcem gradijenta funkcije $F(x_1, x_2)$ u tački B. Proces se dalje nastavlja na isti način. Sve ove može se uopštiti i na funkcije F(X), koje zavise od n-nezavisno promenljivih.

3.4.3. Kvadratno programiranje

Metode rešavanja zadataka NP najpotpunije su razvijene za jednu specijalnu klasu zadataka, koji se karakterišu kvadratnom funkcijom cilja (slika 10) i linearnim skupom ograničenja. Zadaci NP ove vrste s enajčešće javljaju kod analize korisnog efekta (proizvodnje, dobiti, itd.), što se može prikazati konkavnom funkcijom sličmoj krivi 5, ili kada su u pitanju analize troškova, funkcija cilja prikazuje se konveksnom krivom oblika 1, 2 ili 3, kao što je dato na slici 61.



Slika 61. Primeri mogućih oblika kvadratnih funkcija cilja

Formulacija odgovarajućeg matematičkog modela zadataka kvadratnog programiranja može se iskazati funkcijom cilja kojoj treba odrediti minimum ili maksimum, kao:

$$F(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_jx_i \tag{84}$$

uz skup ograničenja:

$$g_i(x_1,x_2,.....x_n)\le 0;..(i=1,2,.....,n)$$

Kvadratna funkcija dve promenljive je oblika:

$$F(X)=c_{11}x_1^2+c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2 \tag{85}$$

Neki od koeficijenata u funkciji cilja (85) mogu biti jednaki nuli. Kvadratna funkcija cilja je konveksna, ako su koeficijenti c_{ij} takvi da za bilo koji par nenegativnih vrednosti promenljivih x_i i x_j imamo ispunjene uslove

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_jx_i\ge 0 \tag{86}$$

U suprotnom slučaju, funkcija F(X) je konkavna, a funkcija – F(X) je konveksna.

Zadaci NP koji se odnose na maksimizaciju odredjenog korisnog efekta ili na minimizaciju troškova, u najvećem broju slučajeva imaju funkciju cilja konveksnu ili konkavnu. Ako su u matematički model uključene promenljive $x_j(j=1,2,\ldots,n)$, koje predstavljaju, na primer, količine različitih artikala proizvodnje, onda funkcija cilja koja održava proizvodnju u najvećem broju slučajeva nije konveksna već konkavna.

3.4.4. Separabilno programiranje

Osnovna karakteristika separabilnog programiranja se sastoji se u tome da je uvek moguće funkciju cilja prikazati zbirom n funkcija (jednačina 19) koje su u opštem slučaju nelinearne, pri čemu svaka od tih funkcija zavisi samo od jedne promenljive, tj.

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}f_j(xj). \tag{87}$$

Zadatak separabilnog programiranja može se formulisati na sledeći način:

Potrebno je odrediti nenegativne vrednosti $x_j \geq 0$, (j=1,2,…,n) za koje funkcija cilja dobija maksimalnu (minimalnu) vrednost, a da pri tome bude zadovoljen skup ograničenja oblika

$$gi(X) = \sum_{j=1}^{n} Gij(xj) \geq 0, \qquad (i=1,2,\ldots, m) \qquad (88)$$

gde je X = (x_1, x_2, …, x_n).

Skup ograničenja oblika (36), mora takodje biti definisan separabilnim funkcijama g_i (X), koje se prikazuju zbirom funkcije g_i (x_j), od kojih svaka zavisi samo od jedne promeljive x_j.

Ekvivalentan matematički model zadatka je:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k \partial Xj} &= 0.. \\ \frac{\partial^2 g_i(X)}{\partial x_k \partial Xj} &= 0. \end{aligned}\right\} \text{ za sve vrednosti k ± j, } \qquad (i = 1,2, \ldots, m), (j=1,2,\ldots, n) \qquad (89)$$

Svi zadaci linearnog programiranja spadaju u klasu zadataka separabilnog programiranja, kao i jedan veliki broj zadataka kvadratnog programiranja.

3.4.5. Celobrojno programiranje

Ovde će se posebna pažnja obratiti na zadatke celobrojnog programiranja kod kojih promenljive x_j uzimaju samo dve vrednosti i to 0 i 1. Ovakvo programiranje se i zove 0-1 programiranje.

Kod rešavanja zadataka 0-1 programiranja, zbog konačnog broja mogućih alternativa, ne koriste se kontinualne metode o kojima je bilo reči. Za njihovo rešavanje razvijene su posebne metode, od kojih se neke zasnivaju na kombinatorici, pa se često i ove metode zovu – kombinatorno programiranje.

Postoji više metoda za rešavanje zadataka 0-1 programiranja. Jedna od najstarijih metoda zasniva se na ispitivanju svih mogućih varijanti dopustivog plana i odabiranju one varijante koja predstavlja optimalni plan. Polazeći od pretpostavke da matematički model odredjenog zadatka 0-1 programiranja sadrži n-promenljivih $x_j(j=1,2,\ldots,n)$ od kojih svaka promenljiva može da uzima vrednost 0 ili 1, lako se dolazi do zaključka da je broj mogućih varijanti rešenja jednak 2. Obzirom da je broj promenljivih $x_j(j=1,2,\ldots,n)$ koje se pojavljuju u realnim matematičkim modelima veoma veliki, ova metoda odabiranja rešenja, kroz pretraživanje svih mogućih varijanti, postaje u praksi neupotrebljiva.

Druge metode za rešavanje zadataka 0-1 programiranja sastoje se u odbacivanju nekih varijanti mogućih rešenja, za koje se pouzdano zna da ne mogu predstavljati optimalni plan.

Matematička formulacija zadataka 0-1 programiranja je:

Potrebno je odrediti vrednost $x_j(j=1,2,\ldots,n)$ za koje funkcije cilja $F = F(x_1,x_2,\ldots, x_n)$ postiže maksimalnu (minimalnu) vrednost, a da pri tome bude zadovoljen skup ograničenja $g_i(x_1,x_2,\ldots, x_n) \leq 0$, $(i = 1,2,\ldots, m)$, pri čemu sve promeljive x_j uzimaju vrednosti:

$$xj = \begin{cases} 0 \\ \overline{1} \end{cases} \ldots (j = 1,2,\ldots.,m) \qquad (90)$$

Ovako formulisani model predstavlja opšti matematički model 0-1 programiranja.

3.5. Primeri rešenih zadataka

Primer 1: Grafička metoda

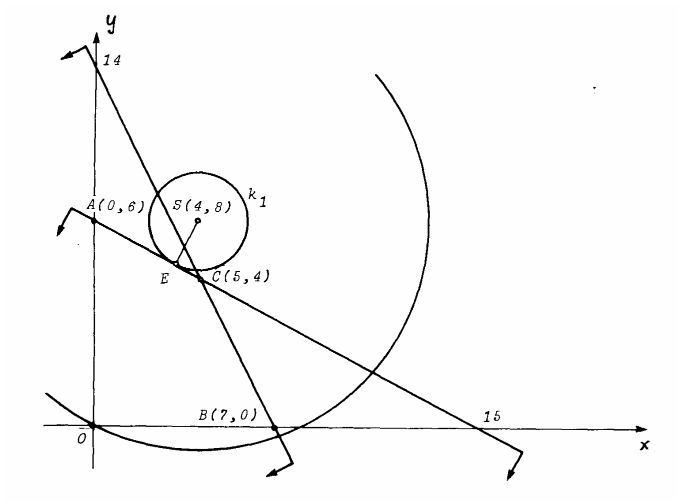
Naći ekstremne vrednosti nelinearne funkcije cilja:

$$F(x,y) = (x-4)^2 + (y-8)^2$$

uz linearna ograničenja:

$$P_1 : 2x + 5y \le 30$$
$$P_2 : 2x + y \le 14$$

Grafička prezentacija problema NP je data na sledećoj slici 62.



Slika 62. Grafička prezentacija Primera 1 NP

Kao što se vidi, funkcija cilja predstavlja kružnicu sa centrom u tački (4,8). Minimum će biti u tački u kojoj funkcija cilja dodiruje oblast ograničenja, a maksimum će biti u jednom od temena oblasti ograničenja. Za odredjivanje koordinate tačke E, u kojoj funkcija cilja ima minimum, koristi se uslov jednakosti koeficijenta (nagiba) prave P1 i tangente na njoj. Rešavanjem dobijenog sistema jednačina, dobijaju se koordinate tačke minimuma i minimalna vrednost funkcije cilja, i to:

E(2,7586; 4,8965) i min.F(x,y)=11,1724

Maksimum funkcije cilja će biti u nekom od temena oblasti mogućih rešenja A(0,6), B(7,0), C(5,4) i O(0,0), u kojima je vrednost funkcije cilja:

$$F(A) = (0-4)^2 + (6-8)^2 = 20$$
$$F(B) = 73$$
$$F(C) = 17$$
$$F(O) = 80$$

Funkcija cilja ima maksimum u tački O(0,0) i ima vrednost maxF(0,0)=80.

Primer 2. Nalaženje ekstrema funkcije troškova

Funkcija troškova proizvodnje tri artikla x_1, x_2 i x_3 je nelinearna i data kao:

$$T(X) = 4 \cdot x_1^2 + \frac{1}{12} \cdot x_2^3 + 7 \cdot x_3^2 - x_2 - 2 \cdot x_1 + \frac{7}{2} \cdot x_3 + 7$$

Odrediti stacionarne tačke funkcije i definisati njihovu prirodu.

Rešenje:

Potrebni uslovi za odredjivanje stacionarnih tačaka se nalaze u definisanju parcijalnih izvoda po svakoj promenljivoj i njihovim izjednačavanjem sa nulom.

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 8 \cdot x_1 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{1}{4} \cdot x_2^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm 2$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_3} = 14 \cdot x_3 - \frac{7}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = -\frac{1}{4}.$$

Na osnovu ovoga ledi da postoje dve stacionarne tačke funcije, i to:

$$A\left(\frac{1}{4}, 2, -\frac{1}{4}\right) \text{ и } B\left(\frac{1}{4}, -2, -\frac{1}{4}\right)$$

Karakter stacionarnih tačaka (min ili max) se utvrjuje drugim izvodima po promenljivima i mešovitim izvodima funkcije troškova, i to:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} T(X)$$

Posle razvoja, dobijaju se sledeći parcijalni i viši izvodi:

$$T_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} T(X) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(4 \cdot x_1^2 + \frac{1}{12} \cdot x_2^3 + 7 \cdot x_3^2 - x_2 - 2 \cdot x_1 + \frac{7}{2} \cdot x_3 + 7) = 8\,,$$

$$T_{12} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad T_{22} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2} \cdot x_2, \quad T_{13} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

$$T_{21} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad T_{23} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad T_{31} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0,$$

$$T_{32} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_3 \partial x_2} = 0, \quad T_{33} = \frac{\partial^2 T(X)}{\partial x_3^2} = 14,$$

Determinante stacionarne tačke su:

$$\det 1 = T_{11}(A) = 8 > 0$$

$$\det 2 = \begin{vmatrix} T_{11}(A) & T_{12}(A) \\ T_{21}(A) & T_{22}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot x_2 \end{vmatrix} = 4 \cdot x_2 = 4 \cdot 2 = 8 > 0$$

$$\det 3 = \begin{vmatrix} T_{11}(A) & T_{12}(A) & T_{13}(A) \\ T_{21}(A) & T_{22}(A) & T_{23}(A) \\ T_{31}(A) & T_{32}(A) & T_{33}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \cdot x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

det 3= 112

Pošto su vrednosti determinanti veće od nule, proizilazi da nelinearna funkcija troškova u tački A (1/4, 2, - 1/4) ima relativni minimum, koji iznosi:

$$\min T(X) = T(A) = 4 \cdot (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{12} \cdot 2^3 + 7 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - 2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) + 7 = 4{,}979 \approx 4{,}98$$

Primenom istog postupka, za tačku B (1/4, -2, -1/4), dolazi se do zaključka da funkcija ima lokalni minimum i u tački B. NJena vrednost u ovoj tačci je:

$$\max T(X) = T(B) = 4 \cdot (\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + 7 \cdot (-\frac{1}{4})^2 - (-2) - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} \cdot (-\frac{1}{4}) + 7 = 7{,}646 \approx 7{,}65$$

Pošto je $T(A) = 4{,}98 < T(B) = 7{,}65$ dolazi se do zaključka da je tačka A globalni minimum funkcije troškova T(X).

3.5.1 Rešavanje problema nelinearnog programiranja korišćenjem programskog paketa LINGO

Savremen način rešavanja problema NP je korišćenjem razvijenih programskih paketa. Jedan od vrlo moćnih programa je LINGO. Korišćenje ovog programskog paketa je pojašnjeno kroz sledeće primere u slučaju nelinerane funkcije cilja.

Primer 1. Definisanje optimalnog prizvodnog programa

Fabrika opreme i delova iz Bora proizvodi 3 vrste muljnih pumpi, tip I, tip II i tip III.
Od strane kupaca je vec naručeno 25 komada pumpi tipa I, 20 komada tipa II i 10 komada tipa III.
Potrebna ulaganja za proizvodnju jedne pumpe iznose: za tip I - 1000 EUR-a, za tip II - 1400 EUR-a i za tip III - 1800 EUR-a.
Menadžment fabrike je napravio analizu i zaključio da je opravdano proizvesti i veći broj pumpi, da ce se za njih pronaći kupci, ali da je raspoloživi fond za ulaganje do 95.000 EUR-a.
Dobit koji se ostvaruje prodajom jedne pumpe nije linearna, već zavisi i od broja proizvedenih pumpi (zbog odnosa fiksnih i promenljivih troškova), i iznosi:

Za tip I: $4x_1^2 - x_1$

Za tip II: $8x_2^2 + 5x_2$

Za tip III: $x_3^2 + 2x_3$

Potrebno je odrediti takav proizvodni program, koji će u uslovima zadatih ograničenja obezbediti maksimalnu dobit.

Matematički model problema:

Funkcija cilja:

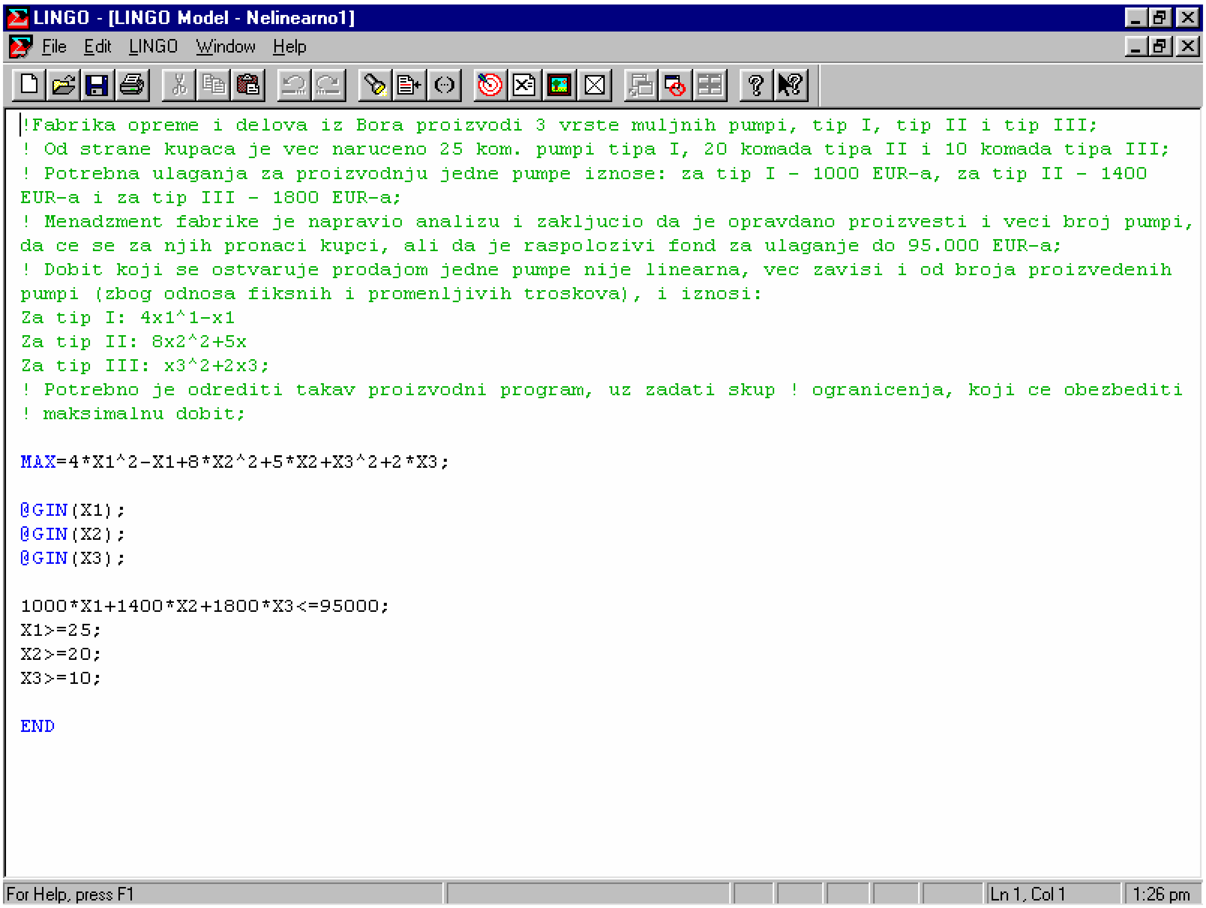
Max F(x)= $4x_1^2 - x_1 + 8x_2^2 + 5x_2 + x_3^2 + 2x_3$

Ograničenja:

1000*X1+1400*X2+1800*X3<=95000;
X1>=25
X2>=20
X3>=10

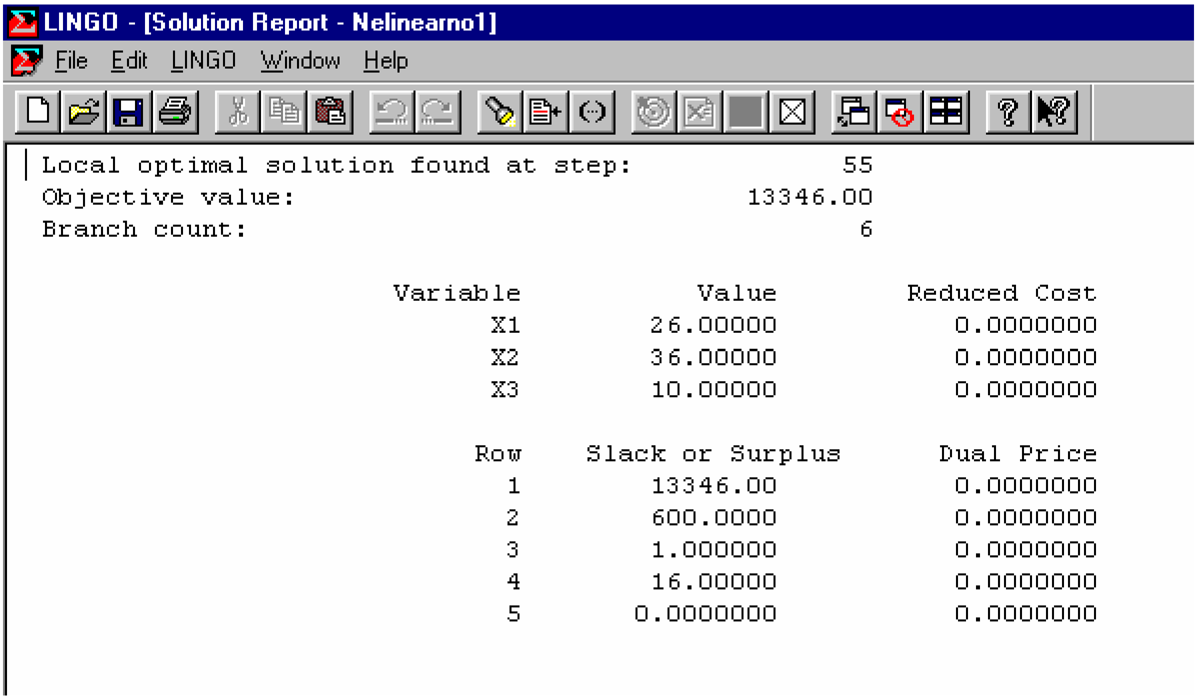
Dodatno ograničenje je da se traži da rešenje bude celobrojno, pošto je za pola pumpe teško naći kupca.

Izgled ekrana sa tekstom zadatka i postavljenim matematičkim modelom je dat na slici 63, sa koje se mogu videti i osnovna pravila sintakse programa LINGO.



Slika 63. Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom

Izgled ekrana sa rezultatima proračuna je dat na slici 64.




```
Local optimal solution found at step:          55
Objective value:                         13346.00
Branch count:                                   6

                  Variable        Value      Reduced Cost
                        X1     26.00000         0.0000000
                        X2     36.00000         0.0000000
                        X3     10.00000         0.0000000

                       Row  Slack or Surplus  Dual Price
                         1     13346.00         0.0000000
                         2     600.0000         0.0000000
                         3     1.000000         0.0000000
                         4     16.00000         0.0000000
                         5    0.0000000         0.0000000
```

Slika 64. Izgled ekrana sa rezultatima proračuna

Vidi se da je optimalni proizvodni program u datim uslovima:

$$[X^{\bullet}] = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 36 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Pri ovom proizvodnom programu, dobit će iznositi $F(X^*)$= 13346 EUR-a.

Primer 2:

Mlekara raspolaže sa 15 hl mleka dnevno i proizvodi: jogurt, pavlaku i kiselo mleko. Za proizvodnju jednog hl jogurta potrebno je 2 hl mleka, za 1 hl pavlake potrebno je 4 hl mleka i za 1 hl kiselog mleka potrebno je 2.5 hl mleka.

Troškovi proizvodnje po hl proizvoda iznose: $4x^2$-1 za jogurt, y^2-3y za pavlaku i $5z^2$ za kiselo mleko.

Formulisati matematicki model plana proizvodnje Borske Mlekare koja obezbedjuje minimalne ukupne troškove.

Definisanje promenljivih:

x – jogurt

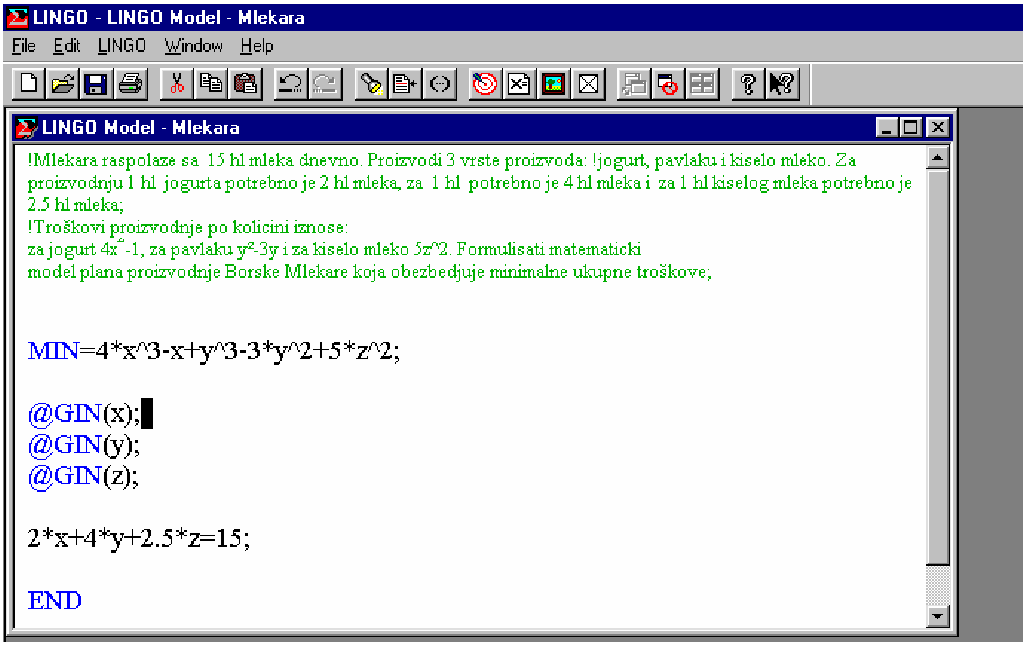
y – pavlaka

z – kiselo mleko;

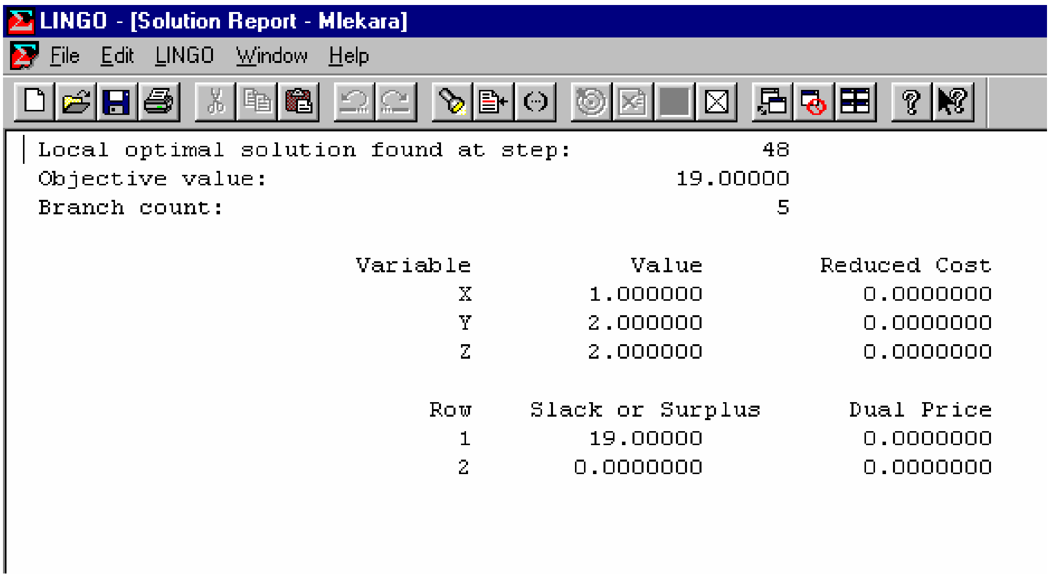
Funkcija cilja: $F(x,y,z) = t1 \cdot x + t2 \cdot y + t3 \cdot z = (4x^2 - 1)\,x + (y^2 - 3y)\,y + 5z^2$

Ograničenje: $2x + 4y + 2.5z = 15$

Izgled ekrana sa postavljenim matematičkim modelom je dat na slici 65, dok je izgled ekrana sa rezultatima proračuna dat na slici 66.



Slika 65. Izgled ekrana sa postavkom zadatka



Slika 66. Izgled ekrana sa rešenjem zadatka

4.0. DINAMIČKO PROGRAMIRANJE

Dinamičko programiranje je poseban matematički aparat, koji omogućuje optimalno planiranje višeetapnih procesa upravljanja. Mnogi zadaci upravljanja procesima u tehnici, ekonomiji, vojsci, fizici, biologiji, itd., mogu se predstaviti u vidu višeetapnih procesa, na koje se može primeniti metoda dinamičkog programiranja, a sa ciljem dobijanje optimalnog plana upravljanja. Kao optimalno upravljanje se podrazumeva ono upravljanje, koje daje najbolje rešenje, odnosno rešenje kojim se postiže maksimalni cilj operacije, pri čemu se u razmatranje uzimaju sve faze procesa.

Za praktičnu primenu metode DP potrebno je da svaki razmatrani proces ima svoj jasno postavljen matematički model, sa precizno definisanim ciljem (funkcija cilja), koji treba maksimizirati (minimizirati) i ograničenjima koja se moraju uzeti u obzir u toku procesa. Za ovako postavljen zadatak, ukoliko su zadovoljeni uslovi koje zahteva primena metode DP, treba naći funkcionalne relacije primenom principa optimalnosti. U izvesnim slučajevima moguće je naći analitičko rešenje, ali najčešće rešenje se nalazi numeričkom analizom, uz primenu razvijenim programa.

4.1. Osnovni pojmovi i termini

Pod terminom sistem podrasumeva se fizički sistem (tehnički, ekonomski, biološki, itd.), koji se može definisati kao vektor stanja:

$$r(t) = r_1(t), r_2(t),\ldots,r_N(t) \tag{91}$$

Komponente vektora r(t) odredjuju osobine sistema, a broj N naziva se dimenzijom sistema.

Ako p označava početno stanje sistema (p tačka koja pripada M-dimenzionalnom prostoru R) , a p_1, p_2,…p_n stanje sistema u uzastopnim vremenskim trenucima i ako postoji relacija

$$P_o = p,\ p_n+1 = W(P_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots, \tag{92}$$

koja predstavlja skup vektora

$$(p_o,p_1,p_2,\ldots,) \qquad (93)$$

kao reprezentaciju ponašanja sistema u diskretnim trenucima vremena n=0,1,2,…, tada se može reći da skup vektora (91) definiše proces, tj. jednu specijalnu vrstu procesa koja se naziva višeetapni proces.

Relacija (92) može se na drugi način napisati kao

$$P_n = W^n(p), \qquad (94)$$

što označava da je n – puta primenjen operator W.

Jasno je da je ovakva vrsta procesa definisana početnim stanjem sistema p i trasformacijom W(p), što se simbolično može predstaviti sa:

$$[p, W(p)]. \qquad (95)$$

Proces se rečima može opisati kao ponašanje sistema u toku vremena.

4.2. Funkcije procesa

U opštem obliku, skalarne funkcije koje zavise od procesa mogu se iskazati kao:

$$G(p_o,p_1,p_2,\ldots p_n). \qquad (96)$$

Kod višeetapnih procesa, najčešće se razmatraju funkcije sledećeg tipa:

$$\sum_{i=0}^{N} G(p_i), \qquad (97)$$

4.3. Vrste procesa

Diskretni i neprekidni procesi

Diskretni procesi su oni procesi u kojima se stanje sistema menja samo u diskretnim trenucima vremena. Ako se posmatra promena stanja sistema neprekidno po vremenu, dolazi se do neprekidnih višeetapnih procesa. Za izučavanje ovakvih procesa mogu se koristiti rezultati dobijeni za diskretne procese, pustivši da dužina intervala vremena izmedju dva posmatranja teži nuli. U slučaju neprekidnih procesa mora se dokazati postojanje i jedinstvenost rešenja, što nije slučaj sa diskretnim, tako da se najčešće izučavaju diskretni višeetapni procesi.

Stacionarni i nestacionarni procesi

Oblik transformacije W (p) do sada je bio takav da nije zavisio od vremena. Procesi ovakvog tipa nazivaju se **stacionarnim**. Ako se pretpostavi da se posmatra složeniji slučaj:

$$p_n+1 = W_n(p_n), \tag{98}$$

gde indeks n označava da transformacija W zavisi od vremena, dolazi se do procesa koji se naziva nestacionarni proces. Moguće je, takodje, da i odgovarajuće funkcije zavise od vremena.

Determinirani i stohastički procesi

U svim procesima koji su do sada razmatrani, stanje sistema p_m+1 bilo je jedinstveno odredjeno na osnovu stanja sistema p_m, putem transformacije W

$$p_m+1 = W(p_m) \tag{99}$$

To su bili tzv. determinirani procesi.

Medjutim, moguće je da W ne bude potpuno poznato, nego je to stohastička transformacija, koja daje slučajni vektor stanja p_1, čija je raspodela verovatnoća odredjena sa p. Niz takvih vektora $[p,p_1,p_2,\ldots,]$ odredjuje diskretni višeetapni proces stohastičkog tipa. Jasno je da će i odgovarajuće funkcije biti takodje slučajne veličine. Da bi se dobili numerički rezultati, uzimaju se matematička očekivanja funkcija ovih slučajnih promenljivih.

4.4. Opšte karakteristike i primena

Opšte karakterisitke modela DP su:

- Globalni model (problem) se rasčlanjuje na etape i u okviru svake etape se vrši optimizacija (maksimizacija dobiti, minimizacija troškova i sl.)
- Etapa (faza) se definiše kao uredjen skup stanja.
- Prilikom izbora procesa upravljanja (ili dejstva) transformacija vakog stanja tekuće etape (faze) je povezana sa sledećom etapom. Ako se problem DP interpretira kao mrežni model, svaki čvor u mreži odgovara jednom stanju.
- U analizi trenutnog stanja, najbolje upravljanje u narednoj etapi je nezavisno od upravljanja (akcija) koje je realizovano u prethodnoj etapi.
- Optimalno upravljanje počinje sa prvom ili poslednjom etapom, u zavisnosti od prirode modela

Praktična primena modela DP se može pokazati na primerima jednodimenzionalne ili višedimenzionalne optimalne raspodele resursa, pri čemu resurs može biti materijal, radna snaga, mašine ili investicije.

4.4.1. Prosta raspodela jednorodnog resursa

Problem se sastoji u raspodeli jednorodnog resursa na n mesta trošenja, pri čemu ta mesta mogu biti različiti proizvodni procesi prerade (utroška) razmatranog resursa, ili različite linije, odnosno mašine, pri čemu je količina resursa ograničena. Svako mesto trošenja (mašina, linija i sl.) ima različitu efikasnost, koja može da se ogleda kroz dobit koja se ostvaruje utroškom (preradom, tretmanom) odredjene količine resursa na odredjenom mestu (mašini, liniji, pogonu). Kapacitet svakog mesta trošenja je takodje ograničen.

Ako funkcija cilja predstavlja dobit, onda se ona može napisati kao:

$$\max F(X) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + \ldots\ldots + g_3(x_3) \qquad (100)$$

U prethodnoj jednačini je:

x_j – količina resursa dodeljena j-tom procesu (mašini, liniji),

g_j (x_j) – funkcija dobiti koja se ostvari kada se količina x_j dodeli j-tom procesu (mašini, liniji),

Pošto je količina resursa ograničena, sledi da je:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = S \qquad (101)$$

U slučaju da su kapaciteti procesa ograničeni, slede i sledeća ograničenja:

$$0 \leq x_j \leq Q_j \qquad (102)$$

Sledeća ograničenja mogu biti zahtevi da promenljive x_j budu celobrojne.

Metod DP se bazira na principu optimalnosti, koji se može interpretirati kao: Optimalna politika ima to svojstvo, da bez obzira na početno stanje i rešenje u početnom trenutku, naredna rešenja moraju biti optimalna u odnosu na stanje koje je dobijeno prvobitnim rešenjem.

Interpretacija gore navedenog se može interpretirati na sledeći način: Ako odredjenu količinu ograničenog resursa S, koju ćemo označiti sa x_n dodelimo n-tom procesu, količinu koja preostaje (S-x_n) treba raspodeliti na ostale procese (mašine, linije, pogone), tako da ostvarena dobit bude maksimalna.

Maksimalna dobit, koja se ostvaruje raspodelom ograničene količine resursa S na n procesa se može iskazati kao:

$$f_n(S) = \max_{0 \le x_n \le S} \{g_n(x_n) + f_{n-1}(S - x_n\} \qquad (103)$$

Dobit na osnovu prvobitnog rešenja, dodele količine x_1 procesu 1 (prvom procesu, prvoj liniji, prvoj mašini) je:

$f_1(S) = \max_{0 \le x_1 \le Q_1} \{g_1(x_1)\}$, uz $f_0(S) = 0$; što sledi iz same definicije funkcije.

Ako se sa x_i^* označe one vrednosti resursa pri kojima se u i-tom procesu postiže maksimalna vrednost efikasnosti, odna proističe:

$$f_n(S) = \max_{0 \le x_n^* \le S} \{g_n(x_n^*) + f_{n-1}(S - x_n^*)\}; \qquad (104)$$

$$f_{n-1}(S - x_n^*) = \max_{0 \le x_{n-1} \le S - x_n^*} \{g_{n-1}(x_{n-1}) + f_{n-2}\lfloor (S - x_n^*) - x_{n-1} \rfloor\} \qquad (105)$$

Na sličan način se sračunavaju i ostale vrednosti $x_{n-1}^*, \ldots\ldots\ldots x_2^*, x_1^*$, imajući u vidu da su to sve delovi ograničenog resursa S koji se dodeljuju odgovarajućim procesima (mašinama, linijama i slično. Posebno, za vrednost x_1^* maksimalna dobit u prvom procesu je:

$$f_1(S - x_n^* - x_{n-1}^* - \ldots - x_2^*) = \max_{0 \le x_1 \le S - x_n^* - \ldots - x_2^*} g_1(x_1) = g_1(S - x_n^* - x_{n-1}^* - \ldots - x_2^*) \qquad (106)$$

4.4.1.1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1: Prosta raspodela jednorodnog resursa sa lineranom funkcijom cilja

U pekari je potrebno rasporediti jednorodni resurs, vreće brašna na liniju za proizvodnju peciva, kolača i hleba. Ostvarena dobit linearno zavisi od količine dodeljenog resursa i iznosi:

- za pecivo (x_1): d_1=4 n.j./jedinici resursa (vreće brašna);
- za kolače (x_2): d_2=5 n.j./jedinici resursa;
- za hleb (x_3): d_3=2 n.j./jedinici resursa.

U razmatranom periodu, pekara će imati na raspolaganju do 8 vreći brašna, dok su kapaciteti svake linije prerada do 5 vreći brašna. Zbog higijensko-tehničkih uslova nije dozvoljeno presipanje brašna, odnosno deljenje jedinice resursa.

Rešenje:

Matematički model se sastoji od funkcije cilja i ograničenja.

Funkcija cilja:

$$\max F(x) = 4 \bullet x_1 + 5 \bullet x_2 + 2 \bullet x_3$$

Ograničenja:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 8$$
$$0 \le x_i \le 5\_za\_i = 1,2,3$$

Dodatno ograničenje je zahtev da promenljive budu celobrojne (sadržaj vreća se ne moze deliti i presipati.

Neposredne dobiti od raspodele resursa linijama su date u sledećoj tabeli:

S	x_1	$f_1(S)$	x_2	$f_2(S)$	x_3	$f_3(S)$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	4	1	5	0	5
2	2	8	2	10	0	10
3	3	12	3	15	0	15
4	4	16	4	20	0	20
5	5	20	5	25	0	25
6	5	20	5	29	0	29
7	5	20	5	33	0	33
8	5	20	5	37	0	37

Vrednosti dobiti u koloni $f_1(S)$ se izračunavaju na osnovu izraza za funkciju cilja, u lučaju da se resurs dodeljuje samo prvoj liniji (pravljenje peciva):

$$f_1(S) = \max_{0 \le x_1 \le 5} 4 \bullet x_1$$

U slučaju da se resurs dodeljuje liniji 1 i 2 (za proizvodnju proizvoda x_1 i x_2), optimalna dobit je prikazana u koloni $f_2(S)$, koja se računa po sledećem izrazu:

$$f_2(S) = \max_{0 \le x_2 \le 5} \{5 \bullet x_2 + f_1(S - x_2)\}$$ na osnovu čega sledi:

$$f_2(0) = \max_{x_2=0} \{5 \bullet 0 + f_1(0-0)\} = 0 + 0 = 0$$

$$f_2(1) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} \left\{ \begin{array}{l} 5 \bullet 0 + f_1(1-0) = 0 + 4 = 4 \\ 5 \bullet 1 + f_1(1-1) = 5 + 0 = \underline{5} \end{array} \right\} \text{=5}$$

$$f_2(2) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2}} \left\{ \begin{array}{l} 5 \bullet 0 + f_1(2-0) = 0 + 8 = 8 \\ 5 \bullet 1 + f_1(2-1) = 5 + 4 = 9 \\ 5 \bullet 2 + f_1(2-2) = 10 + 0 = \underline{10} \end{array} \right\} \text{=10}$$

....

$$f_2(8) = \max_{0 \le x_2 = 5} \left\{ \begin{array}{l} 5 \bullet 0 + f_1(8-0) = 0 + 20 = 20 \\ 5 \bullet 1 + f_1(8-1) = 5 + 20 = 25 \\ 5 \bullet 2 + f_1(8-2) = 10 + 20 = 30 \\ 5 \bullet 3 + f_1(8-3) = 15 + 20 = 35 \\ 5 \bullet 4 + f_1(8-4) = 20 + 16 = 36 \\ 5 \bullet 5 + f_1(8-5) = 25 + 12 = \underline{37} \end{array} \right\} = 37$$

Ako se u razmatranje uvrsti i raspodela resursa na treću liniju, optimalna dobit se računa po sledećoj formuli:

$$f_3(S) = \max_{0 \le x_3 \le 5} \{ 2 \bullet x_2 + f_2(S - x_3) \}$$

$$f_3(0) = \max_{x_3 = 0} \{ 2 \bullet 0 + f_2(0-0) \} = 0 + 0 = 0$$

$$f_3(1) = \max_{\substack{x_3 = 0 \\ x_3 = 1}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \bullet 0 + f_2(1-0) = 0 + 5 = \underline{5} \\ 2 \bullet 1 + f_2(1-1) = 2 + 0 = 2 \end{array} \right\} = 5$$

$$f_3(2) = \max_{\substack{x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_3 = 2}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \bullet 0 + f_2(2-0) = 0 + 10 = \underline{10} \\ 2 \bullet 1 + f_2(2-1) = 2 + 5 = 7 \\ 2 \bullet 2 + f_2(2-2) = 4 + 0 = 4 \end{array} \right\} = 10$$

$$f_3(8) = \max_{0 \le x_2 = 5} \left\{ \begin{array}{l} 2 \bullet 0 + f_2(8-0) = 0 + 37 = \underline{37} \\ 2 \bullet 1 + f_2(8-1) = 2 + 33 = 35 \\ 2 \bullet 2 + f_2(8-2) = 4 + 29 = 33 \\ 2 \bullet 3 + f_2(8-3) = 6 + 25 = 31 \\ 2 \bullet 4 + f_2(8-4) = 8 + 20 = 28 \\ 2 \bullet 5 + f_2(8-5) = 10 + 15 = 25 \end{array} \right\} = 37$$

Optimalno rešenje je isto, i glasi:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vrednost funkcije cilja je:

$$F(X^*) = 4 \bullet x_1 + 5 \bullet x_2 + 2 \bullet x_3 = 4 \bullet 3 + 5 \bullet 5 + 2 \bullet 0 = 37$$

Pošto je u pitanju jednostavni slučaj distribucije jednorodnog resursa, problem se može rešiti direktnim poredjenjem vrednosti funkcije dobiti, a u zavisnosti od mogućih stanja distribucije resursa, kao što je dato u sledećoj tabeli.

x_1	0	1	2	3	4	5	5	5	5
$(S-x_1)$	8	7	6	5	4	3	3	3	3
x_2	5	5	5	5	4	3	3	3	3
$(S-x_2)$	3	3	3	3	4	5	5	5	5
x_3	3	2	1	0	0	0	0	0	0
$g_1(x_1)$	0	4	8	13	16	20	20	20	20
$g_2(x_2)$	25	25	25	25	20	15	15	15	15
$g_3(x_3)$	6	4	2	0	0	0	0	0	0
$\Sigma g_1(x_1)$	31	33	35	37	36	35	35	35	35

I ovom metodom su dobijeni isti rezultati, to jest, optimalno rešenje:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

pri čemu je vrednost funkcije cilja:

$$F(X^*) = 4 \bullet x_1 + 5 \bullet x_2 + 2 \bullet x_3 = 4 \bullet 3 + 5 \bullet 5 + 2 \bullet 0 = 37$$

Primer 2. Prosta raspodela jednorodnog resursa sa nelinearnom funkcijom cilja

Za potrebe rada proizvodnog sistema, potrebno je pamučno platno (jednorodni resurs) raspodeliti na tri moguće proizvodne linije, pri čemu je kapacitet proizvodnih linija limitiran na količinu platna (resursa) $0 \leq x_i \leq 4$ za i =1 – 3. Količina platna je takodje u razmatranom periodu ograničena i iznosi R=7 jedinica. Ostvarena dobit na linijama zavisi od kvadrata količine preradjenog platna, i to:

za liniju 1: $d_1 = 3 \bullet x_1^2$

za liniju 2: $d_2 = 4 \bullet x_2^2$

za liniju 3: $d_3 = 2 \bullet x_3^2$

Ograničenu količinu platna treba tako distribuirati proizvodnim linijama da ostvarena dobit od njegove prerade, u razmatranom periodu bude maksimalna.

Rešenje:

Funkcija kriterijuma (cilja):

$$D(X) = 3 \cdot x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot x_3^2 \rightarrow \max D(X)$$

Ograničenja potiču od ograničenene količine resursa (u ovom slučaju pamučnog platna) i od kapaciteta linija i glase:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7$ i

$0 \leq x_i \leq 4$

Projekcija dobiti u f-ji raspoloživog resursa je data u sledećoj tabeli:

R	x_1	$D_1(R)$	x_2	$D_2(R)$	x_3	$D_3(R)$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	3	1	4	0	4
2	2	12	2	16	0	16
3	3	27	3	36	0	36
4	4	48	4	64	0	64
5	4	48	4	67	0	67
6	4	48	4	76	0	76
7	4	48	4	91	0	91

Kolona $D_1(R)$ u tabeli je sračunata pomoću izraza:

$$D_1(R) = \max_{0 \le x_1 \le 4} \left\{ 3 \cdot x_1^2 \right\}$$

Ako se u razmatranje uvede prvi i drugi proces, vrednosti u koloni $D_2(R)$ se dobijaju pomoću izraza:

$$D_2(R) = \max_{0 \le x_2 \le 4} \left\{ 4 \cdot x_2^2 + D_1(R - x_2) \right\}$$

čijim sračunavanjem slede rezultati:

$$D_2(0) = \max_{x_2=0} \left\{ 4 \cdot 0^2 + D_1(0-0) = 0 \right\} = 0$$

$$D_2(1) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(1-0) = 3 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(1-1) = \underline{4} \end{array} \right\} = 4$$

$$D_2(2) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(2-0) = 12 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(2-1) = 7 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(2-2) = \underline{16} \end{array} \right\} = 16$$

$$D_2(3) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2\\x_2=3}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(3-0) = 27 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(3-1) = 16 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(3-2) = 19 \\ 4 \cdot 3^2 + D_1(3-3) = \underline{36} \end{array} \right\} = 36$$

$$D_2(4) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2\\x_2=3\\x_2=4}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(4-0) = 48 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(4-1) = 31 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(4-2) = 28 \\ 4 \cdot 3^2 + D_1(4-3) = 39 \\ 4 \cdot 4^2 + D_1(4-4) = \underline{64} \end{array} \right\} = 64$$

$$D_2(5) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2\\x_2=3\\x_2=4}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(5-0) = 48 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(5-1) = 52 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(5-2) = 43 \\ 4 \cdot 3^2 + D_1(5-3) = 48 \\ 4 \cdot 4^2 + D_1(5-4) = \underline{67} \end{array} \right\} = 67$$

$$D_2(6) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2\\x_2=3\\x_2=4}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(6-0) = 48 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(6-1) = 52 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(6-2) = 64 \\ 4 \cdot 3^2 + D_1(6-3) = 63 \\ 4 \cdot 4^2 + D_1(6-4) = \underline{76} \end{array} \right\} = 76$$

$$D_2(7) = \max_{\substack{x_2=0\\x_2=1\\x_2=2\\x_2=3\\x_2=4}} \left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot 0^2 + D_1(7-0) = 48 \\ 4 \cdot 1^2 + D_1(7-1) = 52 \\ 4 \cdot 2^2 + D_1(7-2) = 64 \\ 4 \cdot 3^2 + D_1(7-3) = 84 \\ 4 \cdot 4^2 + D_1(7-4) = \underline{91} \end{array} \right\} = 91$$

U kolonu $D_2(R)$ su uvrštene maksimalne vrednosti (podvučene).

Kada se uzme u obzir mogućnost raspodele resursa na sva tri procesa, izraz za maksimalnu dobit, u funkciji raspoloživofg resursa je:

$$D_3(R) = \max_{0 \le x_3 \le 4} \left\{ 2 \cdot x_3^2 + D_2(R - x_3) \right\}$$

Na osnovu ovog izraza su sračunate vrednosti u koloni $D_3(R)$, pri čemu su u tabelu uvrštene maksimalne vrednosti. U ovom slučaju su dobijene maksimalne vrednosti dobiti, pri čemu je uzeta u obzir optimalna dobit drugog i trećeg procesa.

$$D_3(0) = \max_{x_3=0} \left\{ 2 \cdot 0^2 + D_2(0-0) = 0 \right\} = 0$$

$$D_3(1) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(1-0) = \underline{4} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(1-1) = 2 \end{array} \right\} = 4$$

$$D_3(2) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(2-0) = \underline{16} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(2-1) = 6 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(2-2) = 8 \end{array} \right\} = 16$$

$$D_3(3) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2\\x_3=3}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(3-0) = \underline{36} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(3-1) = 18 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(3-2) = 12 \\ 2 \cdot 3^2 + D_2(3-3) = 18 \end{array} \right\} = 36$$

$$D_3(4) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2\\x_3=3\\x_3=4}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(4-0) = \underline{64} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(4-1) = 38 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(4-2) = 24 \\ 2 \cdot 3^2 + D_2(4-3) = 22 \\ 2 \cdot 4^2 + D_2(4-4) = 32 \end{array} \right\} = 64$$

$$D_3(5) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2\\x_3=3\\x_3=4}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(5-0) = \underline{67} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(5-1) = 66 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(5-2) = 44 \\ 2 \cdot 3^2 + D_2(5-3) = 34 \\ 2 \cdot 4^2 + D_2(5-4) = 36 \end{array} \right\} = 67$$

$$D_3(6) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2\\x_3=3\\x_3=4}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(6-0) = \underline{76} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(6-1) = 69 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(6-2) = 72 \\ 2 \cdot 3^2 + D_2(6-3) = 54 \\ 2 \cdot 4^2 + D_2(6-4) = 48 \end{array} \right\} = 76$$

$$D_3(7) = \max_{\substack{x_3=0\\x_3=1\\x_3=2\\x_3=3\\x_3=4}} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0^2 + D_2(7-0) = \underline{91} \\ 2 \cdot 1^2 + D_2(7-1) = 78 \\ 2 \cdot 2^2 + D_2(7-2) = 75 \\ 2 \cdot 3^2 + D_2(7-3) = 82 \\ 2 \cdot 4^2 + D_2(7-4) = 68 \end{array} \right\} = 91$$

Maksimalna vrednost dobijena na osnovu treće funkcije predstavlja i rećenje problema, tako da je:

$$\max D(X) = D_3(7) = 91 \text{ (n.j.).}$$

Optimalna vrednost za treću promenljivu je $x_3=0$ ($D_3(7)=91$. Vrednosti ostale dve promenljive se odredjuju is table, tako da je $x_2=4$, dok iz ograničenja sledi da je $x_1=3$.

Pošto je u pitanju jednostavni slučaj distribucije jednorodnog resursa, problem se može rešiti direktnim poredjenjem vrednosti funkcije dobiti, a u zavisnosti od mogućih stanja distribucije resursa, kao što je dato usledećoj tabeli:

x_1	0	1	2	3	4	4	4	4
$R-x_1$	7	6	5	4	3	3	3	3
x_2	4	4	4	4	3	3	3	3
$R-x_2$	3	3	3	3	4	4	4	4
x_3	3	2	1	0	0	0	0	0
$R-x_3$	4	5	6	7	7	7	7	7
$c_1 \cdot x_1^2$	0	3	12	27	48	48	48	48
$c_2 \cdot x_2^2$	64	64	64	64	36	36	36	36
$c_3 \cdot x_3^2$	18	8	2	0	0	0	0	0
$\sum_{i=1}^{3} c_i \cdot x_i^2$	82	75	78	91	84	84	84	84

Optimalno rešenje je isto, i glasi:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vrednost funkcije cilja je sada: $\max D(X) = D(X^*) = 3 \cdot x_1^{*2} + 4 \cdot x_2^{*2} + 2 \cdot x_3^{*2} = 91$

4.4.2. Raspodela poslova na mašine

Problem raspodele različitih poslova na odredjen broj mašina (koje mogu d realizuju te različite poslove se može definisati na sledeći način:

- neka u pogonu postoji n jednorodnih mašina koje mogu da obavljaju operacije (ili poslove) 1 i 2;
- ako x mašina u toku prvog razmatranog perioda izvršava operaciju 1, to će kompaniji doneti dobit g (x),
- na kraju prvog perioda jedan deo mašina će biti amortizovan, odnosno, neće biti za dalju upotrebu, tako da se u na=rednom periodu (drugom) može računati sa a(x) mašina;
- ako y mašina u toku prvog razmatranog perioda izvršava operaciju 2, to će kompaniji doneti dobit h (y),

- na kraju prvog perioda jedan deo mašina će biti amortizovan, odnosno, neće biti za dalju upotrebu, tako da se u narednom periodu (drugom) može računati sa b(y) mašina;

Za prvi period važe sledeće jednačine:

- za operaciju 1 se odredjuje broj mašina x_1, dok za obavljanje operacije 2 preostaje $y_1 = n_1 - x_1$ (n_1=n =ukupan broj raspoloživih mašina na početku);
- ukupna dobit u prvom periodu iznosi: $g(x_1) + h(y_1)$;
- broj upotrebljivih mašina na kraju prvog perioda (upotrebljivih za rad u drugom periodu) je: $n_2 = a(x_1) + b(y_1)$

Za drugi period važi:

- broj upotrebljivih mašina je: $n_2 = a(x_1) + b(y_1)$;
- za operaciju 2 se odredjuje broj mašina x_1 (od raspoloživih n_2, dok za obavljanje operacije 2 preostaje $y_2 = n_2 - x_2$ (n_1=n =ukupan broj raspoloživih mašina na početku);
- ukupna dobit u drugom periodu iznosi: $g(x_2) + h(y_2)$;
- broj upotrebljivih mašina na kraju drugog perioda (upotrebljivih za rad u trećem periodu) je: $n_3 = a(x_2) + b(y_2)$.

Na isti način se mogu napisati izrazi do N-tog perioda.

Zadatak optimizacije se astoji u tome da se odredi broj mašina koje se odredjuju za obavljanje operacije 1 i operacije 2 u svakom periodu, a da je ostvarena dobit posle N perioda maksimalna.

Matematički model zadatka se može iskazati preko funkcije cilja i ograničenja, kao:

F-ja cilja:
$$\max F(X,Y) = \sum_{i=1}^{N} \left[g(x_i) + h(y_i) \right] \tag{107}$$

Ograničenja proističu od broja raspoloživih mašina u svakom periodu:

$$\begin{aligned} & x_i + y_i = n_i \\ & n_{i+1} = a(x_i) + b(y_i);..(i = 1,2,....N-1) \\ & 0 \le x_i \le n_i;...(i = 1,2,3,....N). \end{aligned} \tag{108}$$

U slučaju da su funkcija cilja i ograničenja linearna, problem se svodi na LP. U drugom slučaju (nelinearnost) problem se može rešiti metodom dinamičkog programiranja.

Funkcionalne relacije

Ako se za $f_N(n)$obeleži maksimalna dobit u N perioda, pri čemu je n broj raspoloživih mašina na početku prvog perioda, tada se rekurentne jednačine dinamičkog programiranja mogu napisati kao:

- do kraja planskog perioda prestoji samo jedan period (ili se razmatra problem koji ima samo jedan period):

$$f_1(n) = \max_{0 \le x \le n} \{g(x) + h(n - x)\} \tag{109}$$

- do kraja planskog perioda je preostalo k perioda:

$$f_k(n) = \max_{0 \le x \le n} \{g(x) + h(n - x) + f_{k-1}[a(x) + b)(n - x)]\}; za..k \succ 1 \tag{110}$$

4.4.2.1. Primeri rešenih zadataka

Preduzeće raspolaže sa 100 visokoproduktivnih presa. U naredne tri godine (N=3) preduzeće treba da izradjuje otpreske tipa A i tipa B, koji se mogu izradjivati na presama (uz zamenu alata). U zavisnosti od raspodele mašina, u i-tom periodu se može ostvariti dobit:

$$g(x_i) + h(y_i) = 0.9x_i + 0.5y_i$$

Amortizacija zavisi od dela koji se izradjuje na mašini (težina, potrebna sila i sl.) i iznosi 70 % za mašine koje izradjuju otpresak A i 20 % za mašine koje izradjuju otpresak B, tako da broj raspoloživih mašina za naredni period iznosi:

$$n_{i+1} = 0.3x_i + 0.8y_i$$

Matematički model problema je:

F-ja cilja:

$$\max F(X) = \sum_{i=1}^{3}(0.9x_i + 0.5y_i)$$

Ograničenja:

$$x_i + y_i = n_i$$

$$n_{i+1} = 0.3x_i + 0.8y_i$$

$$0 \le x_i \le n_i;..n_1 = n$$

- Ako se razmatra samo treći period (period u kome je do kraja planskog period ostao samo jedan, taj treći), maksimalna dobit će iznositi:

$$f_1(n) = \max_{0 \le x_3 \le n_3}\{0,9x_3 + (n_3 - x_3)\}$$

ili

$$f_1(n) = \max_{0 \le x_3 \le n_3}\{0,4x_3 + 0,5n_3\} = 0,9n_3$$

za $x_3 = 0$

- U drugom koraku (k=2) posmatra se maksimalna dobit za treći i drugi period, pa rekurentna jednačina glasi:

$$f_2(n) = \max_{0 \le x_2 \le n_2}\{0,9x_2 + 0,5(n_2 - x_2) + f_1[0,3x_2 + 0,8(n_2 - x_2)]\}$$

ili

$$f_2(n) = \max_{0 \le x_2 \le n_2}\{0,4x_2 + 0,5n_2 + 0,9[0,3x_2 + 0,8(n_2 - x_2)]\}$$

$$f_2(n) = \max_{0 \le x_2 \le n_2}\{1,22n_2 - 0,05x_2\} = 1,22n_2$$

$f_2(n) = 1,22n_2,$ za $x_2 = 0$.

Uzimajući u obzir sva tri perioda, maksimalna dobit će iznositi:

$$f_3(n) = \max_{0 \le x_1 \le n_1} \{0{,}9x_1 + 0{,}5(n_1 - x_1) + f_2[0{,}3x_1 + 0{,}8(n_1 - x_1)]\}$$

odavde proizilazi da je

$$f_3(n) = \max_{0 \le x_1 \le n_1} \{0{,}9x_1 + 0{,}5(n_1 - x_1) + 1{,}22[0{,}3x_1 + 0{,}8(n_1 - x_1)]\}$$

ili

$$f_3(n) = \max_{0 \le x_1 \le n_1} \{0{,}4x_1 + 0{,}5n_1 + 1{,}22(0{,}8n_1 - 0{,}5x_1)\},$$

$$f_3(n) = \max_{0 \le x_1 \le n_1} \{1{,}476n_1 - 0{,}21x_1\} = 1{,}476n_1 = 147.6$$

za $x_1 = 0$.

Rešenje problema je:

max $F(X) = f_3(100) = 147{,}6$

$x_1 = 0$, $y_1 = 100$

$n_2 = 0{,}3x_1 + 0{,}8y_1 = 80$,

$x_2 = 0$, $y_2 = 80$

$n_3 = 0{,}3x_2 + 0{,}8y_2 = 64$

$x_3 = 64$ i $y_3 = 0$.

4.4.3. Optimalna politika zamene opreme

Jedan od principa kod zamene opreme može biti u skladu sa produktivnošću opreme, troškovima korišćenja, kao i preostalom vrednošću opreme.

Neka je:

D(t) – dobit koja se ostvaruje upotrebom opreme stare t godina;

C(t) – godišnji troškovi održavanja opreme;

V(t) – preostala vrednost opreme stare t godina

C – nabavna cena nove opreme.

U razmatranom periodu od N godina (gde je N razmatrani period, život projekta, život proizvoda koji se izradjuju na razmatranoj opremi) treba odrediti optimalni ciklus zamene opreme.

Funkcija cilja $f_N(t)$ predstavlja dobit u razmatranom periodu od N godina koja se ostvaruje eksploatacijom opreme stare t godina.

Da bi se postavila funkcionalna relacija, potrebno je naći vezu medju karakterističnim veličinama u toku dva susedna perioda.

Periodi na koje se ukupni period N raščlanjuje se računaju od kraja. Na početku svakog (bilo kog k-tog perioda) raspolaže se sa opremom starom t godina i moguća su dva alternativna rešenja:

- zadržati staru opremu (staru t godina) i ostvariti dobit:

$$D(t)-C(t)+f_{k-1}(t+1) \tag{111}$$

- nabaviti novu opremu i ostvariti dobit:

$$V(t)-C+D(0)-C(0)+f_{k-1}(1) \tag{112}$$

Optimalna dobit od eksploatacije opreme u preostalih k perioda $f_k(t)$ je:

$$f_k(t)=\max\begin{cases}D(t)-C(t)+f_{k-1}(t+1)\\ V(t)-C+D(0)-C(0)+f_{k-1}(1)\end{cases} \tag{113}$$

Za k=1, odnosno, maksimalna dobit koja se ostvaruje u slučaju da je preostao samo jedan period, korišćenjem opreme stare t godina, pri čemu je t=1,2...N, jednačina glasi:

$$f_1(t)=\max\begin{cases}D(t)-C(t)\\ V(t)-C+D(0)-C(0)\end{cases} \tag{114}$$

5.0. OPTIMALNO REZERVIRANJE

Rešavanje složenih zadataka koji se pojavljuju u praksi zahteva projektovanje složenih tehničkih i organizacionih sistema. Od takvih sistema zahteva se visok stepen pouzdanosti. Ovaj zahtev je kontradiktoran sa prirodom složenih sistema, kod kojih, sa povećanjem složenosti i broja komponenata pouzdanost opada.

Zadaci optimalnog rezerviranja se sastoje u iznalaženju ekstremne vrednosti željenog parametra sistema (pozdanost, otkazi, efikasnost), pri odredjenim ograničenjima u odnosu na troškove ili druge ograničavajuće faktore (brzina, težina, zapremina, itd.). Za ovako formulisan primarni zadatak, može se postaviti i dualni problem, kada se zahteva dostizanje vrednosti nekog od pokazatelja kvaliteta funkcionisanja sistema, pri minimalnim troškovima. I u jednom i u drugom slučaju problem se svodi na izbor najboljeg puta, iz mnoštva puteva, za postizanje željenog cilja – najracionalnije raspodele novčanih sredstava potrebnih za realizaciju sistema, uz postizanje odredjenog kvaliteta njegovog funkcionisanja.

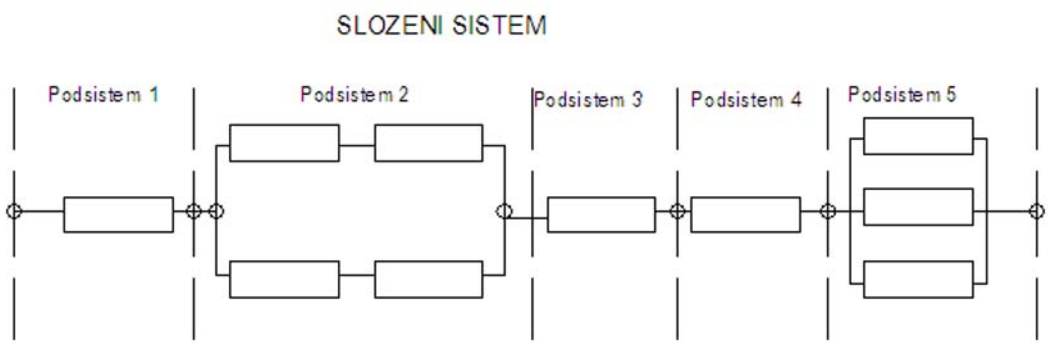
U okviru ovako definisanog zadatka, spadaju problemi optimalne organizacije održavanja, optimalni režim eksploatacije, odredjivanje optimalnog nivoa rezervnih delova itd.

Pri razmatranju optimalnog rezerviranja sistema, treba imati na umu da je svaki sistem sastavljen od podsistema u hijerarhijsku strukturu, do elementarnih podsistema, koje sačinjavaju skupovi medjusobno povezanih elemenata. O ovome će biti više reči u predmetu „Teorija Sistema”.

Povećanje pouzdanosti sistema zahteva ili povećanje pouzdanosti pojedinih elemenata, odnosno podsistema ili, ako to tehnološki nije izvodljivo, izlaz se traži u dupliranju, tripliranju, (takozvana „vruća rezerva” ili stand-by elementi) ili u odredjivanju optimalne količine rezervnih elemenata („hladna rezerva”, magacinska rezerva) svih tipova koji ulaze u sastav podsistema i sistema kao celine.

5.1. Pojmovi i oznake

Pod pojmom „Sistem” podrazumeva se objekat koji je sastavljen od n-nezavisnih (u smislu pouzdanosti) podsistema, pri čemu otkaz bilo kog od n-podsistema dovodi do otkaza celog sistema. Na ovom mestu pod pojmom podsistem pogodno je definisati takav deo sistema koji, sem što njegov otkaz dovodi do otkaza celog sistema, ima nezavisno od ostalih podsistema svoje rezervne elemente. U principu, svaki podsistem može biti sastavljen od jednog ili više elemenata (po pravilu istog tipa) koji mogu biti povezani paralelno i redno, kao što je prikazano na slici 67.



Slika 67. Predstava složenog sistema i podsistema

Po pravilu, podsistem sačinjavaju grupe elemenata istog tipa nezavisno od toga gde su oni ugradjeni u sistem. Svaki podsistem okarakterisan je nekom odredjenom karakteristikom pouzdanosti koja zavisi od uloge podsistema u sklopu celog sistema. Brojna vrednost tog pokazatelja pouzdanosti zavisi od broja rezervnih elemenata datog podsistema.

Da bi se moglo preciznije operisati sa ovim pojmovima, uvešće se sledeće oznake:

c_i	cena jednog elementa i-tog tipa
C_0	zadano ograničenje u odnosu na ukupne troškove sistema, pri rešavanju dualnog zadatka optimalnog rezerviranja;
$C_i(x_i)$	troškovi i-tog podsistema kada je on sastavljen od x_i - rezervnih elemenata
$C(X)$	troškovi celog sistema, pri čemu i-ti podsistem ima x_i - rezervnih elemenata,

$$C(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) \tag{115}$$

$c_i^{(J)}$ troškovi j-og tipa jednog elementa i-og podsistema

$C_O^{(j)}$ zadata ograničenja u odnosu na j-ti tip troškova sistema kod rešavanja zadataka optimalnog rezerviranja pri nekoliko ograničenja;

$C_i^{(j)}(x_i)$ troškovi j-og tipa na i-tom podsistemu, koji je sastavljen od x_i - rezervnih elemenata

$C^{(j)}(X)$ troškovi j-og tipa koji nastaju na celom sistemu, kada njegov i-ti podsistem ima x_i – rezervnih elemenata,

$$C^{(j)}(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(j)}(x_i) \tag{116}$$

p_i pokazatelj pouzdanosti jednog elementa i-tog podsistema (verovatnoća bezotkazanog rada u funkciji vremena ili koeficijent gotovosti);

P_O potrebna vrednost pokazatekja pouzdanosti sistema kod rešavanja primarnog (ishodnog) zadatka;

$P_i(x_i)$ pokazatelj pozdanosti i-tog podsistema koji ima x_i – rezervnih elemenata;

$P(X)$ pokazatelj pouzdanosti sistema u celini, kada i-ti podsistem ima x_i – rezervnih elemenata, tj.:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \tag{117}$$

q_i pokazatelj nepouzdanosti (verovatnoća otkaza) jednog elementa i-tog podsistema: $q_i = 1 - p_i$

Q_O vrednost pokazatelja nepouzdanosti (verovatnoće otkaza) sistema kod rešavanja primarnog (ishodnog) zadatka optimalnog rezerviranja;

$Q_i(x_i)$ pokazatelj nepouzdanosti (verovatnoća otkaza) i-tog podsistema koji sadrži x_i rezervnih elemenata;

$Q(X)$ pokazatelj nepouzdanosti (verovatnoća otkaza) celog sistema, kada i-ti podsistem ima x_i –rezervnih elemenata;

g_i	težina jednog elementa i-tog podsistema;
G_0	ograničenje težine sistema u celini;
$G_i\ (x_i)$	težina i-tog podsistema koji sadrži x_i –rezervnih elemenata;
$G\ (X)$	težina celokupnog sistema, kada i-ti podsistem ima x_i re zervnih elemenata;
v_i	zapremina jednog elementa i-tog podsistema;
V_0	ograničenje zapremine u celini;
$V_i\ (x_i)$	zapremina i-tog podsistema koji sadrži x_i –rezervnih elemenata;
$V\ (X)$	zapremina celog sistema kada i-ti podsistem ima x_i –rezervnih elemenata;
$R\ (X)$	vektor koji determiniše sastav sistema: $R\ (X) = R\ (x_!, x_2, \ldots, x_n)$;
$R\ (P, X)$	vektor pokazatelj sastava i pouzdanosti: $R\ (P; C) = \{P\ (X);\ C\ (X)\}$
x_i	broj rezervnih elemenata i-tog podsistema;
$x_i^{(N}$	broj rezervnih elemenata i-tog podsistema na N-tom koraku procesa iznalaženja rešenja;
X	vektor čije su komponente broj rezervnih elemenata svih podsistema, tj. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
$X^{(N)}$	vektor X dobijen na N-tom koraku procesa iznalaženja rešenja;
$X_i^{(N)}$	vektor koji se dobija iz $X^{(N)}$, kada se isključi komponenta $x_i^{(N)}$, tj. $X_i^{(N} = (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \ldots, x_{i-l}^{(N)}, x_{i+1}^{(N)}, \ldots, x_{(n)}^{(N)})$

Pokazatelj pouzdanosti sistema u celini predstavlja odredjenu funkciju, koja zavisi od vrednosti pokazatelja pouzdanosti podsistema, odnosno broja rezervnih elemenata u svakom od podsistema. Zato se može napisati da je:

$$P\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\ \{P_1(x_1),\ P_2(x_2), \ldots, P_n\ (x_n)\} \qquad (118)$$

Skup brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ karakteriše sastav rezervnih elemenata u sistemu (broj rezervnih elemenata podsistema) i naziva se vektor sastava, koji se označava sa $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

U najvećem broju slučajeva, obzirom na razvijenost odgovarajuće metodologije i izučavanja širih mogućnosti njene primene, pouzdanost sistema $P\ (X)$ može da se odredi za sve sisteme, kod kojih otkaz bilo kog podsistema dovodi do otkaza celog sistema. Kao posledica toga proističe da je

$$P(X) = P_1(x_1)\ P_2(x_2)\ldots\ P_n(x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_1(x_i) \tag{119}$$

Kod razmatranja podsistema jednog složenog sistema, podrazumevaće se da je zavisnost P_i od x_i poznata, tako da sve potrebne vrednosti $P_i(x_i)$ mogu biti izračunate.

Otkaz ili kvar sistema u nekim procesima može da dovede do velikih ekonomskih gubitaka. To postaje naročito izraženo u automatizovanim procesima, gde se u pogledu pouzdanosti rada odgovarajuće tehnike svakim danom postavljaju sve oštriji zahtevi. Smanjivanje otkaza (nepouzdanosti) nije u većini slučajeva moguće postići na račun smanjivanja nepouzdanosti pojedinih elemenata. Ograničenja za to su u prvom redu tehničko-tehnološke mogućnosti, zatim troškovi izrade elemenata, njihova težina, zapremina, itd. Metod „vrućeg” rezerviranja primenjuje se sa ciljem postizanja visokog stepena pouzdanosti sistema kad su njegovi elementi relativno niske pouzdanosti i kada nije moguće isterati visoku pouzdanost sistema kroz povećanje pouzdanosti pojedinih njegovih elemenata. Metoda „vrućeg” rezerviranja je sa gledišta povećanja pouzdanosti sistema ili uredjaja veoma prikladna, ali s druge strane, ona vodi složenijim sistemima ili uredjajima, povećanju njihove zapremine, težine i troškova realizacije.

Otuda proističe problem optimalnog projektovanja sistema ili uredjaja odredjene pouzdanosti, pri ograničenjima u odnosu na neke ključne parametre, kao što su: težina, zapremina i troškovi realizacije. Ovakvi zadaci za koje se može konstruisati odgovarajući matematički model, sa precizno definisanom funkcijom cilja i odgovarajućim skupom ograničenja, spadaju u klasu upravljačkih zadataka za čije se rešavanje mogu primeniti poznate metode optimizacije i tim putem iznaći optimalna ili njima bliska rešenja. Cilj je da se na ovom mestu ukaže na mogućnost primene kvantitativnih metoda optimizacije, kao i na različite aspekte te primene, iz čega će se moći videti različite mogućnosti, teškoće i ograničenja kako u odnosu na konstrukciju matematičkih modela, tako i u odnosu na mogućnost iznalaženja rešenja i njegovu konkretizaciju. Na kraju, daće se osvrt na neka pitanja i probleme rešavanja zadataka koji imaju za cilj obezbedjenje sistema ili uredjaja sa optimalnim količinama rezervnih delova (elemenata). Ovi problemi, kao što je napomenuto, spadaju u domen teorije i prakse rezerviranja, kao metodepovećanja pouzdanosti i često se izučavaju pod nazivom „hladno rezerviranje”.

Obzirom da je metodologija povećanja pouzdanosti posredstvom rezerviranja novijeg porekla i stara svega nekoliko godina, treba ukazati da svi aspekti njene primene nisu u dovoljnoj meri razradjeni. Naravno da će se to osetiti i u ovom delu teksta. No, bez obzira na sve to, cilj je bio da se ukaže na jednu novu metodologiju koja je u punom zamahu svog razvoja i od koje se u bliskoj budućnosti očekuju značajni rezultati, tim pre što se zna da mnogi zadaci iz teorije upravljanja zalihama omogućuju, samo posle neznatne preformulacije, da se formulišu kao zadaci optimalnog rezerviranja. Tipični zadaci te vrste su zadaci periodične popune (obezbedjenja) sistema (uredjaja) rezervnim delovima (elementima), uz uvažavanje ekonomskih faktora, vremena popune kompleta rezervnih delova, brzine opravke sistema, itd., što se može tretirati kao zadatak optimalnog upravljama zalihama, odnosno obezbedjenja optimalnih količina rezervnih delova. Sem toga, u poslednje vreme počela se razvijati interesantna metodologija vezana za izučavanje dinamičkih procesa uključivanja (zamene) pojedinih rezervnih elemenata u odredjenom regularnom vremenu, kada je ta zamena optimalna sa stanovišta eksploatacije sistema. Ističu se i druge mogućnosti primene nekih poznatih metodologija optimizacije, na čemu se i danas veoma intenzivno radi. Medjutim, ovde će se izneti samo neki rezultati koji imaju neposredniju praktičnu primenu.

5.2. Postava zadataka

U praksi postoji interes za rešavanjem odredjenih zadataka rezerviranja, čija se postavka može tipizarati i svesti na oblik takozvanih standardnih zadataka. Postavka ovih zadataka najbolje se može razumeti na jednostavnim primerima, koji će poslužiti kao ilustracija, pri čemu je pouzdanost sistema (podsistema) koji ima x_i rezervnih delova (uz jedan radni):

$$P_i\ (x_i) = 1 - q_i^{\,x_i + 1}\ , \quad (i = 1,2,\ ..\ n) \tag{120}$$

Uzimajući u obzir da su karakteristike elemenata sistema poznate (p_1 = 0,7; c_1 = 1; p_2 = 0,5; c_2 = 3), treba odrediti vrednosti x_1 i x_2 koje će obezbediti da verovatnoća bezotkaznog rada sistema ne bude manja od zadane vrednosti (na primer 0,98), a da troškovi izrade datog sistema budu minimalni. Isti zadatak može se formulisati sa drugom funkcijom cilja i drugim ograničenjem, pa bi njegova postavka bila: naći vrednosti x_1 i x_2 koje će obezbediti da verovatnoća bezotkaznog rada sistema bude maksimalna, a da troškovi njegove realizacije ne premašuju jednu unapred zadanu sumu (na primer, 10 novčanih jedinica).

Slična je postavka zadatka za sisteme sastavljene od tri elementa u radnoj vezi, za koje imamo, sbog rezerviranja, da je

$$P_i (x_i) = 1 - q_i^{x_i + 1} \quad , \quad (i = 1, 2\ 3) \qquad (121)$$

Polazeći od zadanih karakteristika pojedinih elemenata (p_1 = 0,7; c_1 = 1; p_2 = 0,5; c_2 = 3; p_3 = 0,5; c_3 = 1), potrebno je naći takve vrednosti x_1 , x_2 , x_3 za koje će sistem imati verovatnoću bezotkaznog rada ne manju od neke unapred zadane vrednosti (na primer 0,9), a da pri tome troškovi njegove realizacije budu minimalni, odnosno obrnut zadatak glasio bi: naći one vrednosti x_1, x_2, x_3 za koje će verovatnoća bezotkaznog rada sistema biti maksimalna, pri ograničenim troškovima njegove realizacije (na primer, 15 novčanih jedinica).

U opštem slučaju, zadaci optimalnog rezerviranja, za slučaj jednog ograničavajućeg faktora, mogu biti formulisani na sledeći način: potrebno je naći takav broj rezervnih elemenata za svaki podsistem sa ciljem obezbedjenja odredjene vrednosti verovatnoće bezotkaznog rada sistema, ali sa minimalnim troškovima njegove realizacije.

Matematički model treba da odredi vektora $X = (x_{1,}\ x_2, \ldots , x_n)$ kao:

Funkcija cilja:

$$\min C(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \bullet x_i \qquad (122)$$

Ograničenje:

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \geq P_0 \qquad (123)$$

Na sličan način, u odnosu na postavljeni zadatak, može se formulisati i obrnuti zadatak, za koji su troškovi realizacije sistema ograničeni, a traži se maksimalna vrednost verovatnoće bezotkaznog rada.

Njegov matematički model glasi:

Funkcija cilja:

$$\max P(X) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \tag{124}$$

Ograničenje:

$$C(X) \leq C_0 . \tag{125}$$

Za slučaj kada kod postavke i rešavanja zadataka, o kojima je bilo reči, postoji više različitih ograničenja (ne samo jedno ograničenje), onda se neki od tih zadataka mogu formulisati na sledeći način: potrebno je naći optimalni broj rezervnih elemenata za svaki podsistem, kada su troškovi realizacije sistema ograničeni, kao i neki resursi od kojih zavisi njegova realizacija, pri čemu funkcija cilja koja se maksimizira odražava pouzdanost sistema.

Matematički model problema je:

Funkcija cilja:

$$\max P(X) = \prod_{i=1}^{n} P_i(x_i) \tag{126}$$

Ograničenja:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) \leq C_0 \text{ ,(ograničena novčana sredstva)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} G_i(x_i) \leq G_o \text{ , (ograničena težina),} \tag{127}$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i(x_i) \leq V_0 \text{ , (ograničena zapremina}$$

gde su vrednosti

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

5.3. Metode rešavanja

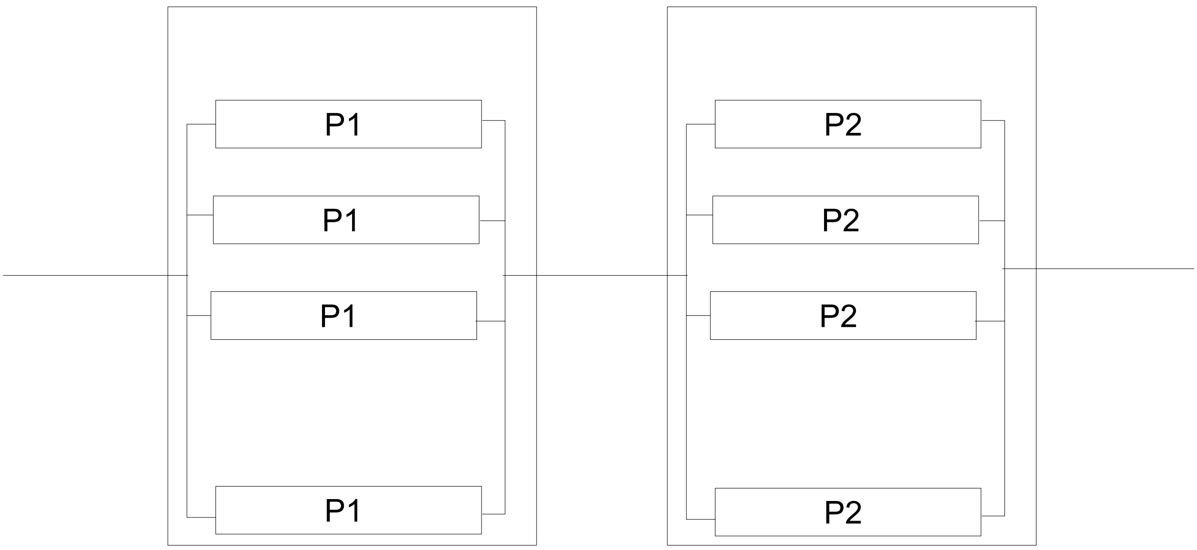
Sem metoda linearnog programiranja često se koriste i druge metode (naročito kada je u pitanju jedno ograničenje), kao što su:

a) metoda Lagrange-ovih množitelja,
b) gradijantna metoda, i
c) metoda dinamičnog programiranja.

5.4. Primeri rešenih zadataka

Primer 1: Modeliranje sistema sa traženom pouzdanošću

Razmatrani sistem se sastoji od dva podsistema, kao što je dato na slici 68, čiji elementi imaju čije su verovatnoće pouzdanog rada p_1 = 0,7 i p_2 = 0,5.



Slika 68. Složeni sistem

Zadatak je naći takvu strukturu sistema da ukupna pouzdanost bude $P \geq 0.98$.

Verovatnoća pouzdanosti rada celog sistema je:

$P(X) = P_1(x_1)\ P_2(x_2) = [\,1 - (1 - p_1)^{x1+1}\,]\,[\,1 - (1 - p_2)^{x2+1}\,]$

Za konkretni primer, u zavisnosti od broja rezervnih elemenata (podsistema), mogu se tabelarno prikazati verovatnoće bezotkaznog rada svakog od podsistema ponaosob, kao što je to uradjeno u sledećoj tabeli:

x_i	$P_1(x_1)$	$P_2(x_2)$
0	0,7	0,5
1	0,91	0,75
2	0,973	0,875
3	0,9919	0,9375
4	0,99757	0,96875
5	0,999271	0,984375
6	0,9997813	0,9921875
7	0,99993439	0,99609375
. . .	. . .	. . .

Pretpostavimo da nas interesuje koliko prvom, a koliko drugom podsistemu treba dodati rezervnih elemenata da bi pouzdanost rada celog sistema bila veća od 0,98. Obzirom da pouzdanost sistema mora biti veća od 0,98 jasno je da pouzdanost bilo kog podsistema posmatranog sistema mora takodje biti veća od 0,98. Za prvi podsistem, kao što se vidi iz tabele, za $x_1 = 2$, sledi

$$P_1(x_1 = 2) = 0{,}973 < 0{,}98 \leq P(X)$$

što ne zadovoljava postavljeni uslov. Medjutim za $x_1 = 3$

$$P_1(x_1 = 3) = 0{,}9919 > 0{,}98\,,$$

zadovoljen je postavljeni uslov, tako da se može napisati:

$$P(X) = P_1(x_1)\ P_2(x_2) = 0{,}9919\ P_2(x_2) \geq 0{,}98;$$

odakle sledi :

$$P_2(x_2) \geq \frac{0{,}98}{0{,}9919} \approx 0{,}9881$$

Poredjenjem vrednosti za $P_2\ (\ x_2\ ) \approx 0{,}9881$ sa odgovarajućim vrednostima u tabeli, može se zaključiti da je $x_2 = 6$. To znači da je jedno od mogućih rešenja $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, za koje je

$$P\ (\ X\ ) = P_1\ (x_1 = 3\ )\ P_2\ (\ x_2 = 6\ ) > 0{,}98.$$

Na isti način, kao što je pokazano da je moguće rešenje postavljenog zadatka

$$X = (\ x_1, x_2\ ) = (3{,}6),$$

može se pokazati da tu osobinu ima i rešenje

$$X = (\ 4,\ 5\ ),$$

koje, ako se komparira sa prvim rešenjem, ima sa stanovišta pouzdanosti sistema nepovoljnije uslove, jer je

$P_1(3)\ P_2(6) = 0{,}9919\ .\ 0{,}9921875 > P_1(4)\ P_2(5) = 0{,}99757\ .\ 0{,}984375.$

Sem toga, može se zaključiti da prva varijanta ima manje rezervnih elemenata za prvi podsistem nego što ima druga, ali i u prvoj i u drugoj varijanti ukupan zbir rezervnih elemenata prvog i drugog podsistema iznosi 9. Na izbor varijante može da utiče cena, težina ili zapremina pojedinih elemenata, ili njihov ukupan iznos svakog pojedinačno, ali za ceo sistem.

Ako bi se uzela u obzir cena pojedinih elemenata (na pr.: $c_1 = 1$; $c_2 = 3$), imali bi za prvu varijantu da je

$$C\ (\ X\ ) = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 21,$$

a za drugu

$$C\ (\ X\ ) = C\ (\ 4,\ 5\ ) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 19,$$

što bi značilo da je druga varijanta rešenja $X = (\ x_1\ ;\ x_2\ ) = (\ 4;\ 5\ )$ jeftinija.

Kao što se vidi, jednostavniji primeri mogu se rešavati prostim odabiranjem rešenja. Medjutim, za složenije slučajeve neophodna je primena savremenih metoda optimizacije.

6.0. TEORIJA IGARA

6.1. Opšte

Svuda gde postoje konfiktne situacije, u društvu, industriji, pri projektovanju novih proizvodnih sistema, teorija igara može dati doprinos u njihovom rešavanju. Logičke osnove ove matematičke discipline imaju veliku ulogu naročito kod istraživanja operacija, kod donošenja odluka kada se zna da će se realizacija nekog poduhvata, neke mere, sprovoditi u uslovima aktivnog suprotstavljanja konkurenta, što je redovna pojava na tržištu usluga i proizvoda. Ovakva situacija može se pojaviti čak i unutar jedne kompanije, gde kod njenih pojedinih delova postoje suprotni pojedinačni interesi. Teorija igara se može predstaviti kao matematička teorija konflktnih situacija, sa primenom u onim situacijama, kada ishod „igre” (poduhvata) ne zavisi samo od jedne strane, već i od reakcije protivnika (konkurenta).

Nastanak teorije igara se vezuje za rad američkog matematičara von Naumann „Theory of games and economic behaviour” iz 1944. godine.

Dosadašnja razmatranja, kod kojih je tražen optimum, može se izraziti na sledeći način:

Igrač (kompanija) A razmatra više alternativnih planova, strategija, pri čemu svakoj strategiji odgovara odredjen ishod, pri čemu se vrši optimizacija, odnosno, bira se minimum ili maksimum u zavisnosti od prirode problema.

Igrač (kompanija) A razmatra strategije $\Rightarrow A\ (a_1,\quad a_2, \ldots\ldots a_n)$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

Mogući ishodi igre (poduhvata): $\Rightarrow \qquad C\ (C(a_1), C(a_2) \ldots C(a_n))$

Traži se optimum (u slučaju maksimuma): $C(a^*) \geq C(a_i)$

Situacija se usložnjava ukoliko postoji i drugi igrač, koji može da utiče na ishod igre prvog igrača izborom neke od svojih strategija, što se može prikazati kao:

Igrač (kompanija) A razmatra strategije $\Rightarrow A\ (a_1,\quad a_2, \ldots\ldots a_m)$

Igrač (kompanija) B razmatra strategije $\Rightarrow B\ (b_1,\quad b_2, \ldots\ldots b_n)$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

Mogući ishodi igre sada zavisi od dve promenljive: $\Rightarrow\ C = (C(a_i, b_j)$

U daljem izlaganju koristiće se sledeći pojmovi:

- igra: model realnog ponašanja dva igrača na tržištu,
- strategija: plan razvoja igre,
- igra sa nultum sumom: slučaj kada jedna strana dobina onoliko koliko druga strana gubi,
- ***Optimalna strategija*** je takva strategija, koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbedjuje igraču maksimalno mogući srednji dobitak, odnosno minimalno mogući srednji gubitak. Polazeći od ovoga, formuliše se sledeći princip:
    - igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz najnepovoljnije pretpostavljeno ponašanje protivnika. Ovakav postupak predstavlja zapravo izbor najopreznije strategije, a sam princip se naziva principom *maximin*-a.
    - igrač može da bira svoje ponašanje da mu gubici budu minimalni pri, po njemu najnepovoljnijem delovanju protivnika, pri čemu se ovakav princip naziva ***minimax***.
    - ovo zapravo predstavlja oprezan pristup i što razlikuje teoriju igara od kocke.

Najjednostavniji model je „parna igri" sa nultom sumom (rezultatom), što znači da u igri učestvuju samo dva protivnika, sa uslovom nulte sume - dobitak jednog protivnika je gubitak drugog.

Matrična formulacija izbora odluke o strategiji dva protivnika, od kojih je jedan „Alfa", a drugi „Beta" je data u tabeli 5.

Tabela 5.

		Beta		
		C_1	C_2	C_3
Alfa	S_1	-1	0	+1
	S_2	-2	-3	+3
	S_3	-1	+1	-3

Konkurentske strategije razlikuju se od onih u stihijskim uslovima time što njih svesno projektuje protivnik.

U navedenoj matrici se pretpostavlja da dobici prikazani „Alfi" , predstavljaju gubitke, odnosno sume koje „Beta" treba da isplati „Alfi" pri svim mogućim kombinacijama strategije jedne i druge strane. Negativne zabeleške odgovaraju gubitku „Alfe” i dobitku „Bete”. Na primer, ako „Alfa” izabere za svoju strategiju S_2, a „Beta” strategiju C_3, onda će prva dobiti 3 poena, a druga će izgubiti 3 poena.

U konkurenciji izmedju dve firme, ako se gubici i dobici mere udelom plasmana robe (ili usluga) u ukupnom plasmanu na dotičnom tržištu, onda će, svakako, dobitak jedne firme označavati i gubitak konkurenta. Ali ako se dobitak meri obimom plasmana, onda uslov nulte sume ne važi, izuzev ako se ukupan kapacitet tržišta ne menja u toku dužeg perioda. Medjutim, takvi slučajevi su veoma retki.

U vezi gornje napomene valja reći da, iako teorija igara predstavlja matematički model, ipak se za utvrdjivanje optimalne strategije mogu primenjivati i čisto kvalitativni faktori. Ovo tim pre, što se radi o sistemima sa aktivnim učešćem ljudi.

Primena metode će se pojasniti jednim hipotetičkim primerom. Dve firme „Alfa” i „Beta” proizvode laserske štampače. „Alfa” je razradila novi model štampača, gde su primenjeni novi principi, sa poboljšanim kvalitetom štampe, uz manju potrošnju tonera. Za novi princip”Alfa” je dobila patent. Rukovodstvo firme proučava pitanje o tome kako treba postupiti sa novim modelom i razmatraju sledeće tri mogućnost:

S_1 – planirati proizvodnju većeg broja novih proizvoda i izuzeti iz proizvodnje stari model da bi se oslobodili proizvodni kapaciteti;

S_2– pustiti u proizvodnju najveću partiju novog modela održavajući rad postojećih linija štampača na predjašnjem niivou;

S_3 – ne puštati u proizvodnju novi model do uvodjenja dopunskih proizvodnih kapaciteta.

Rukovodstvo kompanije „Alfa” misli da kompanija „Beta”, u slučaju njene pune informisanosti o novom patentu, može izabrati samo jednu od tri razumne strategije:

C_1 – modernizovati štampače koje sada proizvodi;

C_2 – zadržati tip štampača koji proizvodi bez izmene,

C_3 – pokušati da na brzinu stvori svoj radikalno novi model štampača.

Primenjivo na ovaj konkretni zadatak rukovodioci kompanije „Alfa” sastavljaju novu platežnu matricu. Oni treba da utvrde veličine za svako ukrštanje redova i kolona matrice. Ova intuitivna rasudjivanja su odgovor na pitanje o tome na koji način uslovi, koji odgovaraju različitim ukrštanjima redova i kolona u matrici (to jest različitim parovima strategija, na primer S1 i C3 ili S2 i C1), mogu uticati na udeo kompanije „Alfa” u plasmanu štampača u toku dužeg perioda.

Neka je, posle izvesne diskusije bila razradjena dole navedena matrica plaćanja i da je medju rukovodećim saradnicima postignuta saglasnost o procenama kako je dato u tabeli 6.

Tabela 6.

		Beta		
		C_1	C_2	C_3
Alfa	S_1	dobro	srednje	dobro
	S_2	srednje	odlično	loše
	S_3	katastrofalno	dobro	srednje

Gore navedeno ocenjivanje je „kvalitativno”. Da bi se sačinila matrica sa kvanntitativnim ocenama, mora se primeniti skala za prevodjenje kvalitativnih ocena u kvantitativne. U tabeli 7 je data linearna skala sa opsegom 0 do 6, za prevodjenje kvalitativnih ocena u kvantitativne.

Tabela 7.

Kvalitativna ocena	Kvantitativna ocena
katastrofalno	0
veoma loše	1
loše	2
srednje	3
dobro	4
veoma dobro	5
odlično	6

Posle kvantifikacije, matrica izgleda kako je dato u tabeli 8.

Tabela 8.

		β_1	β_2	β_3
		C_1	C_2	C_3
α_1	S_1	4	3	4
α_2	S_2	3	6	2
α_3	S_3	0	4	3

Primenjujući princip nalaženja optimalne strategije za kompaniju „Alfa” (maximin), nalazi se donja granica vrednosti igre α, kao garantovani dobitak, pri čemu je:

$$\alpha = \max_i . \min_j . c_{ij} \tag{128}$$

Optimalna strategija za kompaniju β se odredjuje pomoću kriterijuma minimax, kojim se odredjuje donja granica vrednosti igre, ili nivo bezbednosti za kompaniju β kao:

$$\beta = \min_j . \max_i . c_{ij} \tag{129}$$

Primenjujući gore navedene principe, dobija se se matrica igre, kao što je dato u tabeli 9.

Tabela 9.

	Strategija	β			Minimalni dobici	
		C_1	C_2	C_3		
α	S_1	4	3	4	3	→
	S_2	3	6	2	2	Maximin vrednost
	S_3	0	4	3	3	→
Maksimalni gubici		4	6	4		
		↓		↓		

Minimax vrednost

Kao što se vidi, $\max_i . \min_j . c_{ij} \neq \min_j . \max_i . c_{ij}$, , što znači da protivnici ne primenjuju čiste strategije, odnosno, optimalne strategije se nalaze u domenu mešovitih strategija.

6.2. Čiste matrične igre

Čista matrična igra je u slučaju kada je cena igre za obe strane identična, odnosno, kada važi:

$$\max_i . \min_j . c_{ij} = \min_j . \max_i . c_{ij} \tag{130}$$

Kombinacija strategija u ovom slučaju daje tačku sedla. Za konkurentske kompanije je najbolje da iskoriste rezultat koji odgovara tački sedla i da izabrane strategije sistematski i dosledno primenjuju.

6.2. 1. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

Za datu matricu plaćanja odrediti optimalne strategije, tačku sedla i vrednost igre.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešenje zadatka je dato kroz sledeću matricu:

	Strategije	Igrač I2				Minimalni dobici
		I2-1	I2-2	I2-3	I2-4	
Igrač I1	I1-1	2	5	3	4	2
	I1-2	7	8	6	9	6
	I1-3	3	1	2	5	1
Maksimalni gubici		7	8	6	9	

Maximin vrednost

Minimax vrednost

Birajući strategiju I1-2, igrač I1 će ostvariti garantovanu dobit od 6 jedinica, bez obzira na strategiju igrača I2. Takodje, birajući strategiju I2-3, igrač I2 će ostvariti minimalni gubitak od 6, bez obzira na strategiju igrača I1.

Pošto su maximin i minimax vrednosti iste, strategije su optimalne.

Vrednost igre je: ν=6

Igra ima sedlastu tačku: ST (2,3).

Primer 2.

U jednoj epidemiji je otkriveno prisustvo tri vrste mikroba (M_1, M_2 i M_3). Na raspolaganju su nam dve vrste antibiotika (A_1 i A_2). Antibiotik A_1 ima verovatnoću uništavanja mikroba M_1, M_2 i M_3: 0,3, 0,4 i 0,5, respektivno. Sa druge strane, antibiotik A_2 uništava mikrobe M_1, M_2 i M_3 sa verovatnoćom: 0,2, 0,3 i 0,6, respektivno.

Formirati matricu igre i odrediti njenu vrednost.

Rešenje:

	Strategija	Mikrobi			Minimalni dobici
		M1	M2	M3	
Antibiotici	A1	0.3	0.4	0.5	0.3
	A2	0.2	0.3	0.6	0.2
Maksimalni gubici		0.3	0.4	0.6	

Maximin vrednost

Minimax vrednost

Vrednost igre je $\nu=\alpha=\beta=0.3$.

Igra ima sedlastu tačku T(1,1)

Primer 3.

Dva proizvodjača bezalkoholnih pića „LAV” i „TIGAR” su direktni konkurenti u svojoj klasi pića na lokalnom tržištu i svoje reklamne kampanje provode putem lokalne televizije ili lokalnih novina, pri čemu svakog meseca preduzeća donose odluku o načinu reklamiranja. Menadžment preduseća „LAV” je uspeo da sačini sledeće predvidjanje:

- ako reklamira svoje sokove preko TV-a imaće:
  - dobit od 150.000 dinara ako se preduzeće „TIGAR” reklamira preko novina,
  - dobit od 100.000 dinara ako se preduzeće „TIGAR” reklamira preko TV-a
- ako reklamira svoje sokove preko novima imaće:
  - dobit od 50.000 dinara ako se preduzeće „TIGAR” reklamira preko TV-a,
  - dobit od 200.000 dinara ako se preduzeće „TIGAR” reklamira preko novina

Formirati matricu igre i odrediti njenu vrednost

Rešenje:

	Strategija	DENI		Minimalni dobici
		TV	Novine	
LAV	TV	100.000	150.000	100.000
	Novine	50.000	200.000	50.000
Maksimalni gubici		100.000	200.000	

Maximin vrednost

Minimax vrednost

Vrednost igre je: $\nu= \alpha=\beta=100.000$.

Igra ima sedlastu tačku T(1,1)

Primer 4:

Dva proizvodjača dečje obuće ”TRI PRASETA” i ”STRAŠNI VUK” su direktni konkurenti na lokalnom tržištu. Preduzeće ” TRI PRASETA ” je za sezonu jesen – zima 2005. pripremilo potpuno nov model dečje obuće, poboljšan prošlogodišnji model, uz naravno postojeći prošlogodišnji model. Zbog ograničenih proizvodnih kapaciteta i potrebe da lansira zadovoljavajuću veličinu serije, preduzeće treba da se opredeli za jedan model. Rukovodstvo preduzeća ” TRI PRASETA ” zna da direktni konkurent nije razvio novi model obuće, već da je samo poboljšao prošlogodišnji, pa je na osnovu ovoga sačinilo sledeće pretpostavke o obimu prodaje, kao merilu uspešnosti izabrane strategije:

- **ako** ” STRAŠNI VUK ” plasira na tržište poboljšani model, procenjeni obim prodaje će biti:
  - oko 100 pari, ako se plasira nov model,
  - oko 80 pari ako se plasira stari poboljšani model, i
  - oko 50 pari ako se plasira stari model bez poboljšanja, ii
- **ako** ” STRAŠNI VUK ” plasira na tržište stari model, procenjeni obim prodaje je:
  - oko 150 pari, ako se plasira nov model,
  - oko 100 pari ako se plasira stari poboljšani model, i
  - oko 75 pari ako se plasira stari model bez poboljšanja.

a. Formulisati matricu igre i odrediti sedlastu tačku,
b. Odrediti optimalnu strategiju preduzeća ”TRI PRASETA”, obzirom na ostvarenje planiranog obima prodaje.

Rešenje:

Strategija		STRAŠNI VUK		Minimalni dobici
		Pob. model	Stari model	
TRI PRASETA	Novi model	100	150	100
	Pob. model.	80	100	80
	Stari model	50	75	50
Maksimalni gubici		100	150	

Maximin vrednost

Minimax vrednost

a) Vrednost igre je $\nu=\alpha=\beta=100.000$. Igra ima sedlastu tačku T(1,1)

b) Optimalna strategija preduzeća „TRI PRASETA” je T1, odnosno, da na tržište izbaci novi model dečje obuće.

6.3 Mešovite matrične igre

Za razliku od čiste matrične igre, postoje slučajevi kada cene igre nisu identične za oba učesnika. Optimalna strategija više nije u sistematskoj promeni jedne strategije (alternative), već se ona dobija kombinacijom primene strategija (alternativa) sa odgovarajućom verovatnoćom, odnosno sa odgovarajućom učestanošću. Vektori mešovitih strategija igrača A i B se mogu predstaviti kao:

Igrač A: $P = P(p_1, p_2, ...p_m);...\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ (131)

Igrač B: $Q = Q(q_1, q_2, ...q_n);...\sum_{ij1}^{n} q_i = 1$

Vrednost matrične igre će u ovom slučaju biti:

$$C(P,Q) = v = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bullet p_i \bullet q_j \tag{132}$$

Pri ovome je:

- ✓ p_i: verovatnoća da je igrač A izabrao i-tu strategiju,
- ✓ q_j: verovatnoću da je igrač B izabrao j-tu strategiju,
- ✓ a_{ij}: dobit u slučaju da je igrač A izabrao i-tu strategiju, a igrač B j-tu strategiju.

Rešanje mešovitih matričnih igara je sloeženije, i najčešći metodi rešavanja su:

- ✓ analitički,
- ✓ grafički,
- ✓ tehnikom linearnog programiranja.

6.3.1. Analitički metod rešavanja

Vrednost igre, odnosno položaj tačke sedla se nalazi izjednačavanjem parcijalnih izvoda po p i q sa nulom, kao:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(p,q)}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial C(p,q)}{\partial p} = 0 \end{aligned} \tag{133}$$

i korišćenjem uslova da je: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;..i....\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$

Primena analitičkog metoda će biti pojašnjena kroz sledeće primere:

Primer 1.

Naći vrednost igre i optimalne strategija, za matričnu igru koja je zadata sledećom matricom plaćanja: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Strategija		Igrač B		Minimalni dobici
		B1	B2	
Igrač A	A1	1	4	1
	A2	3	2	2
Maksimalni gubici		3	4	

maxmin
α=2

minmax
β=3

Igra nema jednoznačno odredjenu vrednost. Pošto je $\alpha = 2 < \beta = 3$, vrednost igre je izmedju 2 i 3 i iznosi:

$$C(P,Q) = v = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \bullet p_i \bullet q_j$$

$$v = p_1 q_1 + 4 p_1 q_2 + 3 p_2 q_1 + 2 p_2 q_2$$

$$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1$$
$$q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_1$$

$$v = p_1 q_1 + 4 p_1 (1 - q_1) + 3(1 - p_1) q_1 + 2(1 - p_1)(1 - q_1)$$

$$v = 2 p_1 - 4 p_1 q_1 + 2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_1} &= -4q_1 + 2 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2};.q_2 = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1} &= -4p_1 + 1 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{4};.p_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \frac{5}{2}$$

Vrednost igre je: $v = \frac{5}{2}$, odnosno, $v = 2{,}5$.

Igrač A treba da primenjuje strategiju A1 u 50 % slučajeva i strategiju A2 u takodje 50% slučajeva.

Igrač B treba da primenjuje strategiju B1 u 25 % slučajeva a strategiju B2 u 75 % slučajeva.

6.3.2. Grafička metoda rešavanja

Grafička metoda će biti pojašnjena kroz primer rešavanja matrične igre zadate preko sledeće matrice plaćanja: $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Strategija		Igrač B				Minimalni dobici
		B1	B2	B3	B4	
Igrač A	A1	2	3	1	5	1
	A2	4	1	6	0	1
Maksimalni gubici		4	3	6	5	

minmax
$\beta=3$

maxmin
$\alpha=1$

Igra nema jednoznačno odredjenu vrednost. Pošto je $\alpha = 1 < \beta = 3$, vrednost igre je izmedju 1 i 3, odnosno, igrači će primenjivati pešovite strategije, pri čemu su vektori verovatnoća izbora strategija:

za igrača A: $P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$;...$\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$; i

za igrača B: $Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$;...$\sum_{j=1}^{4} q_j = 1$

Vrednost igre za igrača A se može predstaviti grafički, preko linearnih funkcija verovatnoće p_1.

Ako igrač B izabere strategiju B1, B2, B3 ili B4 očekivani rezultat, odnosno vrednost igre za igrača A će biti respektivno:

L1: $2p_1 + 4p_2 = 2p_1 + 4(1 - p_1)$

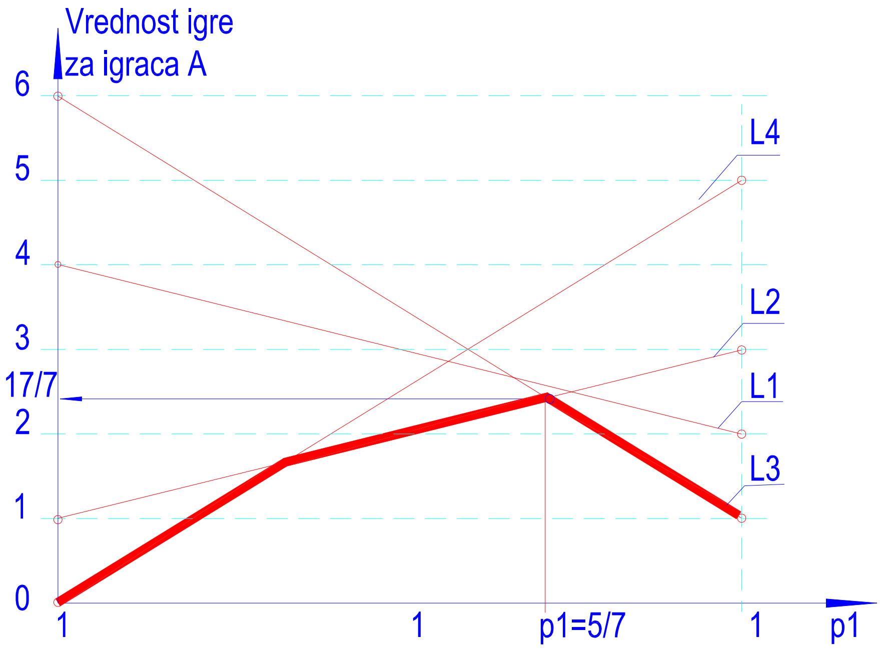
L2: $3p_1 + p_2 = 3p_1 + (1 - p_1)$

L3: $p_1 + 6p_2 = p_1 + 6(1 - p_1)$

L4: $5p_1$

$0 \le p_1 \le 1$

Grafička predstava vrednosti igre za igrača A, u zavisnosti od verovatnoće izvora strategije A1 (p_1) je data na slici 69.



Slika 69. Vrednost igre za igrača A

Minimalne vrednosti za igrača A, odnosno, vrednosti igre pri najnepovoljnijem delovanju protivnika su prikazane na podebljanoj izlomljenoj liniji – envelopi. Pošto igrač A teži maksimizaciji vrednosti igre, on primenjuje princip maxmin, i bira onu vrednost verovatnoće p_1 koja to obezbedjuje. U ovom slučaju je to p_1=5/7. Ovo znači da je optimalna strategija igrača A ako u p_1=5/7 slučajeva bira strategiju A1, a u p_2=2/7 bira stretegiju A2, pri čemu je vrednost igre ν=17/7. Ova vrednost igre se nalazi u preseku linearnih funkcija koje predstavljaju strategije B2 i B3 igrača B, što znači da se početna matrica plaćanja redukuje na matricu koja ima samo drugu i treću kolonu.

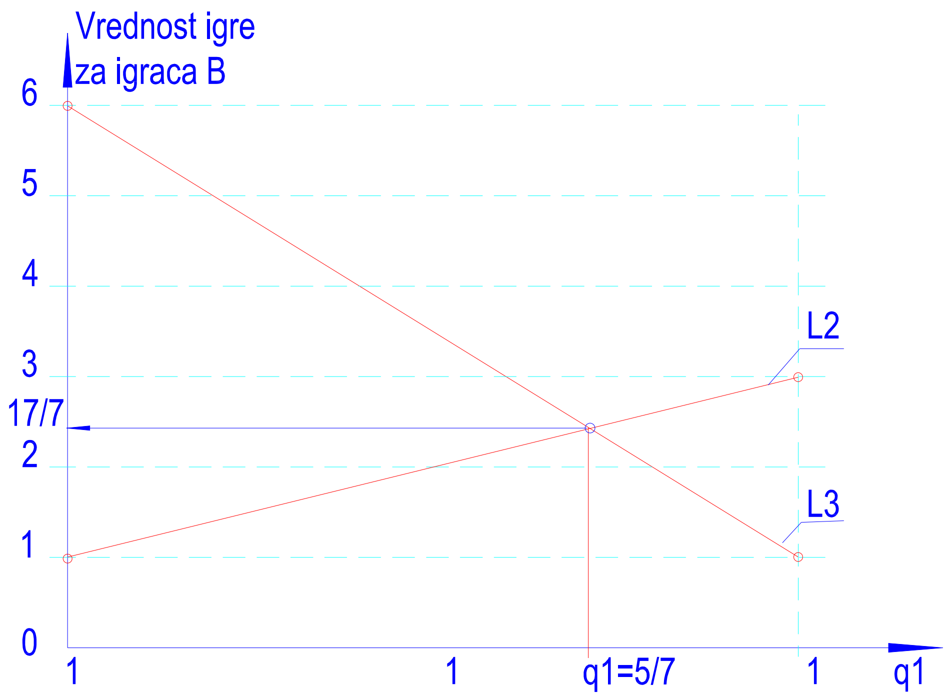
Redukovana matrica plaćanja je: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Ako igrač A izabere strategiju A1 ili A2 očekivani rezultat, odnosno vrednost igre za igrača B će biti respektivno:

L1: $3q_1 + 1q_2 = 3q_1 + (1 - q_1)$

L2: $q_1 + 6q_2 = q_1 + 6(1 - q_1)$; $\quad 0 \le q_1 \le 1$

Grafička predstava vrednosti igre za igrača B je data na slici 70.



Slika 7-. Grafička predstava vrednosti igre za igrača B

Rezultat igre sa mešovitom strategijom je: ν=17/7, sa optimalnim mešovitim strategijama igrača A: $P^* = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$. i igrača B: $Q^* = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \end{bmatrix}$.

6.3.3. Rešavanje metodama LP

Neka je zadata matrična igra u kojoj, u opštem slučaju igrač A ima na raspolaganju m strategija, koje može primenjivati sa verovatnoćama p_1, p_2, . . . p_m. Pri ovome igrač A naravno teži najboljem rezultatu, odnosno, najvećoj vrednosti igre, po principu maxmin, odnosno bez obzira na strategiju koju izabere igrač B.

Matematički model ovakve situacije je:

Funkcija cilja: $\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet c_{ij}$ (134)

Ograničenja: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \ldots p_i \geq 0$ (135)

U model se uvodi nova promenljiva, vrednost igre, koja je:

$$v \leq \min_j \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet c_{ij} \tag{136}$$

Matematički model sada postaje:

Funkcija cilja:

$\max v$

Ograničenja:

$$\begin{aligned} & v \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet c_{i1} \\ & v \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet c_{i2} \\ & \bullet \\ & \bullet \\ & v \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \bullet c_{im} \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{aligned} \tag{137}$$

Isti način rezonovanja važi i za igrača B, pri čemu on primenjuje strategiju minmax, odnosno nastoji da smanji gubitak. Vrednost igre za igrača B je:

$$w \geq \max_i \sum_{j=1}^{n} q_j \bullet c_{ij} \tag{138}$$

Matematički model sada postaje:

Funkcija cilja:

min w

Ograničenja:

$$\begin{aligned} & w \geq \sum_{j=1}^{n} q_j \bullet c_{1j} \\ & \bullet \\ & w \geq \sum_{j=1}^{n} q_j \bullet c_{mj} \\ & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \end{aligned} \tag{139}$$

Može se videti da modeli koji odgovaraju igraču A i igraču B su zapravo dualni, pa sledi da je: $v^* = w^*$.

6.3.4. Rešavanje matričnih igara redukcijom – dominacija strategija

Igre sa velikim dimenzijama matrica plaćanja je ponekad moguće smaniti – redukovati kioristeći princip dominacije strategija.

Strategija igrača A u i-tom redu (A_i) je dominantna nad strategijom u k-tom redu (A_k), ako važi:

$$c_{ij} \geq c_{kj} ..za..\forall j \qquad (140)$$

Strategija u i-tom redu je dominirajuća, dok je strategija u k-tom redu dominirana.

Igrač A nema nikakvog interesa da primenjuje dominiranu strategiju (A_K), pa se k-ti red može ukloniti iz matrice plaćanja, pri čemu se vrednost igre ne menja.

Isto važi i za igrača B, pri čemu strategija u j-toj koloni (B_j) dominira nad strategijom u k-toj koloni (B_k) ako važi:

$$c_{ij} \leq c_{ik} ..za..\forall i \qquad (141)$$

Igrač B takodje nema nikakvog interesa da primenjuje dominiranu strategiju (B_K), pa se k-ta kolona može ukloniti iz matrice plaćanja, pri čemu se vrednost igre ne menja.

Princip redukcije je pojašnjen kroz sledeći primer:

Primer 1:

Za igru koja je zadata matricom plaćanja $C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 9 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ odrediti vrednost igre i optimalne strategije igrača.

Rešenje:

Strategija		Igrač B			Minimalni dobici
		B1	B2	B3	
Igrač A	A1	6	2	5	2
	A2	9	7	4	4
	A3	3	1	3	1
Maksimalni gubici		9	7	5	

minmax
β=5

maxmin
α=4

Igra nema jednoznačno odredjenu vrednost. Pošto je $\alpha = 4 < \beta = 5$, vrednost igre je izmedju 4 i 5, odnosno, igrači će primenjivati pešovite strategije.

Pre daljeg rešavanja, izvršiće se redukcija matrice plaćanja. Sa stanovišta igrača A, važi $c_{1j} \geq c_{3j}..za..\forall j$, odnosno, da je strategija A1 dominantna nad strategijom A3, pa se treći red može brisati iz matrice plaćanja.

Takodje, za igrača B važi da je $c_{i2} \leq c_{i1}..za..\forall i$, odnosno, da je strategija B2 dominantna u odnosu na strategiju B1, pa se prva kolona može brisati iz matrice plaćanja, čime se dobija redukovana matrica plaćanja:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrična igra se rešava analitičkom metodom:

$$C(P,Q) = v = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij} \bullet p_i \bullet q_j$$

$$v = 2p_1q_1 + 5p_1q_2 + 7p_2q_1 + 4p_2q_2$$

$$p_1 + p_2 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - p_1$$
$$q_1 + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = 1 - q_1$$

$$v = 2p_1q_1 + 5p_1(1-q_1) + 7(1-p_1)q_1 + 4(1-p_1)(1-q_1)$$

$$v = -6p_1q_1 + p_1 + 3q_1 + 4$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_1} &= -6q_1 + 1 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{6};.q_2 = \frac{5}{6} \\ \frac{\partial v}{\partial q_1} &= -6p_1 + 3 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2};.p_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Vrednost igre je: $v = \frac{9}{2}$, odnosno, $v = 4{,}5$.

Igrač A treba da primenjuje strategiju A1 u 50 % slučajeva i strategiju A2 u takodje 50% slučajeva.

Igrač B treba da primenjuje strategiju B1 u 16,666 slučajeva a strategiju B2 u 83,333% slučajeva.

7.0. TEHNIKA MREŽNOG PLANIRANJA (TMP)

Za racionalno poslovanje i vodjenje projekata, neophodno je primenjivati razvijene metode planiranja i upravljanja. Najpre treba definisati šta se podrazumeva pod pojmom „projekat”.

Projekat je zapravo poduhvat, odnosno grupa zadataka koje treba izvršiti u odredjenom vremenskom periodu, koji imaju definisan cilj, a sa ograničenim resursima.

Projekat ima:

- definisan cilj,
- trajanje sa definisanim početkom i krajem,
- definisan obuhvat radova,
- budžet i odobreno korišćenje odredjenih resursa,
- zahteva primenu posebne organizacije za njegovo izvršenje.

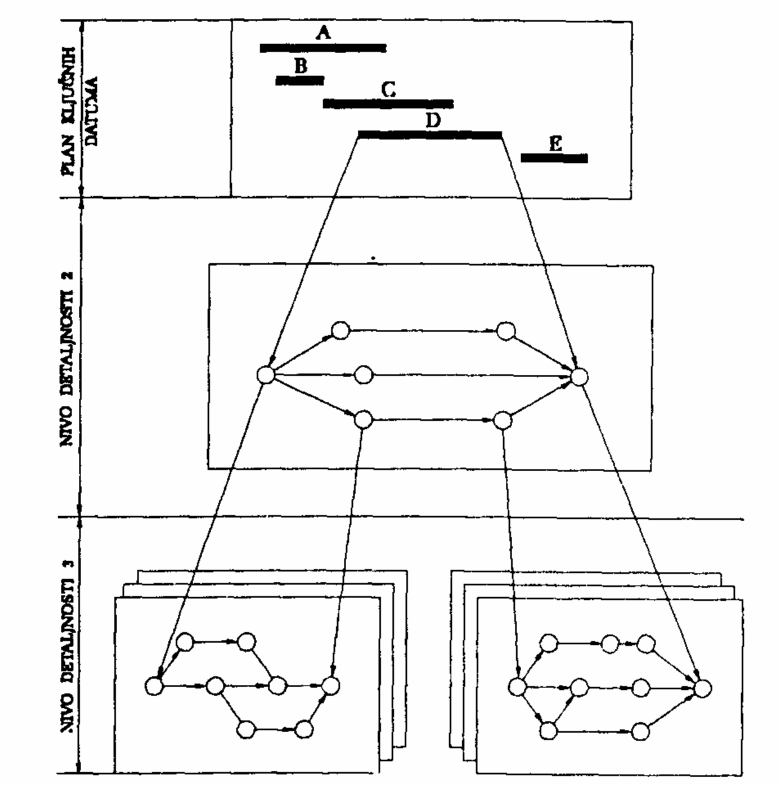
Jedna od osnovnih tehnika upravljanja složenim projektima je Tehnika Mrežnog Planiranja (TMP). Osnovne metode, koje datiraju od pedesetih godina prošlog veka su:

- Prva razvijena metoda – CPM (Critical Path Method) – Metod kritičnog puta (1957. g.);
    - o u slučajevima kada je vreme trajanja pojedinih aktivnosti poznato i jednoznačno odredjeno (nije ga moguće normirati),
    - o najduži put u mrežnom dijagramu (vremenski) i bez vremenskih zazora je kritični put i odredjuje ukupno vreme trajanja projekta.
- PERT (Program Evaluation and Review Technique) - Metoda ocene i revizije programa aktivnosti – 1958. g.;
    - o vreme trajanja pojedinih aktivnosti nije jednoznačno odredjeno,
    - o vrši se procena trajanja aktivnosti i to: optimistička, normalno i pesimističa procena vremena trajanja
- PDM (Precendenc Diagramming Method) – Metod prvenstva,
    - o koristi specifični blok mrežni dijagram.

7.1. Metod kritičnog puta- CPM (Critical Path Method)

7.1.1. Osnovna struktura i elementi mrežnog dijagrama

Struktura Mrežnog Dijagrama (MD) predstavlja uspostavljanje logičnog redosleda i medjusobnih zavisnosti pojedinih aktivnosti koje treba realizovati u toku posmatranog projekta. Rezultat rada je mrežni model ili mrežni dijagram projekta, što predstavlja i najteži posao u mrežnom planiranju i upravljanju. Primer mrežnog dijagrama sa hijerarhijski postavljenim nivoima planova je dat na slici 71.



Slika71. Primer mrežnog dijagrama

Osnovni elementi mrežnog dijagrama (MD) su:

- aktivnosti,
- dogadjaji.

Aktivnosti su vremenski intervali koji mogu imati sledeća značenja:

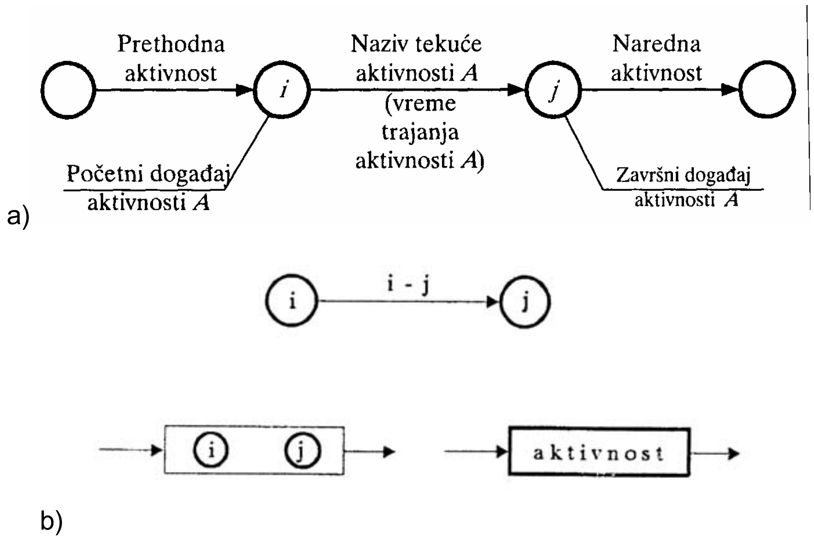
- stvarna aktivnost, radni proces, koji zahteva vreme za realizaciju i utrošak nekih resursa (materijal, energija, norma časova rada i slično),

- čekanje, koje ne zahteva utrošak resursa, ali zahteva vreme (hladjenje materijala, hladjenje peći pre reparacije ozida i slično),
- fiktivna aktivnost, koja ne zahteva ni utrošak vremena ni resursa, ali ukazuje na logičku vezu izmedju operacija, odnosno, pokazuje koja operacija ne može otpočeti pre završetka neke odredjene operacije. Ovakve aktivnosti se u MD prikazuju isprekidanim linijama.

Dogadjaj predstavlja početak ili završetak jedne ili većeg broja aktivnosti, ili celog projekta. Dogadjaj ne troši vreme i sredstva i odigrava se trenutno.

7.1.2. Grafička predstava mrežnog dijagrama

Osnovna struktura dela mrežnog dijagrama je grafički prikazana na slici 72, i to za CPM metod (slika 72.a) i za PDM metod (slika 72.b).



Slika 72. Grafička predstava osnovne strukture mrežnog dijagrama

Skup komponenti u mreži kod kojih se završni dogadjaj svake aktivnosti poklapa sa početnim dogadjajem naredne aktivnosti naziva se put ili tok. Niz takvih aktivnosti, koji povezuje početni i završni dogadjaj sa najdužim vremenom trajanja i bez vremenskih rezervi naziva se kritični put.

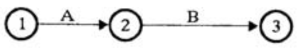
Analiza strukture sadrži sledeće etape:

- sastavljanje liste aktivnosti – pravljenje strukturalne tabele,
- oblikovanje mrežnog dijagrama,
- kontrola mrežnog dijagrama.

7.1.3. Formiranje mrežnog dijagrama i analiza strukture

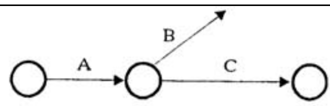
Osnovna pravila za konstruisanje mrežnog dijagrama su data na slici 73.

Osnovna veza
Aktivnost A mora da se završi pre početka aktivnosti B

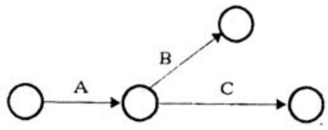


Nepravilno

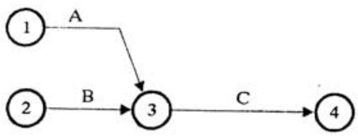
Aktivnost se mora završiti dogadjajem



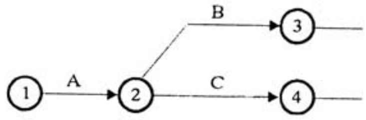
Pravilno



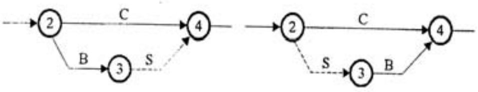
Pravilo spajanja
Aktivnost C može da počne pošto se završe aktivnosti A i B



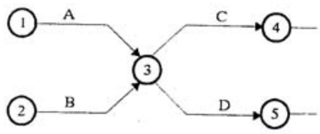
Pravilo granjanja
Aktivnosti B i C mogu da započnu tek pošto se završi aktivnost A



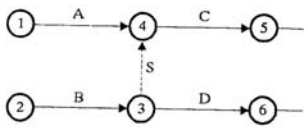
Ako dve aktivnosti imaju zajednički početni i završni dogadjaj, uvodi se fiktivna aktivnost



Nepravilno, postoji neodredjenost, odnosno, dvoznačnost.



Pravilno, sa uvodjenjem fiktivne aktivnosti



Slika 73. Osnovna pravila za konstruisanje MD

Formiranje mrežnog dijagrama nekog zamišljenog projekta biće prikazano kroz sledeći primer. Strukturalna tabela je data tabelom 10.

Tabela 10.

Aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Prethodna aktivnost	-	-	B	A,C	B	B	D,E	D,E,F	D,E,F	G,H
Trajanje (h)	6	7	2	3	4	3	5	8	9	4

Medjuzavisnost aktivnosti se može prikazati i matricom medjuzavisnosti, kao u tabeli 11.

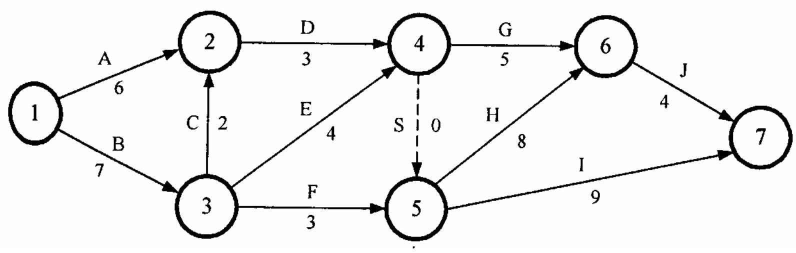
Tabela 11.

		POSMATRANA AKTIVNOST									
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
P	A				X						
R	B			X		X	X				
E	C				X						
T.	D							X	X	X	
A	E							X	X	X	
K	F								X	X	
T	G										X
I	H										X
V	I										
N.	J										

Pri konstrukciji mrežnog dijagrama, numerisanje dogadjaja se može vršiti proizvoljno i po rangu. Prednost se zbog unifikacije daje numerisanju po rangu, odnosno po rastućoj numeraciji. Početni dogadjaj se obeležava sa 1, a završni sa n. Numeracija ostalih dogadjaja treba da ispunjava uslov i<j. Jednoznačna numeracija se može izvesti koristeći pravilo Fulkersona, koje se sastoji u sledećem:

- početni dogadjaj se obeleži sa 1, a sve strelice (aktivnosti) koje izlaze iz njega se precrtaju u blizini njihovog kraja,
- dogadjaji na krajevima ovih aktivnosti se numerišu narednim celim brojevima, idući od gore prema dole i sleva na desno,
- za sledeće dogadjaje postupak se ponavlja.

Koristeći ova pravila, moze se formirati mrežni dijagram zamišljenog projekta kao na slici 74:



Slika 74 Mrežni dijagram

7.1.4. Analiza vremena

Ovde će biti data analiza vremena za mrežno planiranje po metodi CPM. Vreme trajanja aktivnosti izmedju dogadjaja (i – j) je t_{ij}, što predstavlja procenjeno ili normirano vreme.

Najraniji početak aktivnosti (i-j) se označava kao $t_i^{(0),\ a}$, a najraniji završetak aktivnosti (i-j) se označava sa sa $t_j^{(0)}$. Ovo vreme se dobija kao:

$$t_j^{(0)} = t_i^{(0)} + t_{ij} \tag{142}$$

U slučaju da do j-tog dogadjaja vodi više puteva, biće korišćena uopštena relacija:

$$t_j^{(0)} = \max_i \left\{ t_i^{(0)} + t_{ij} \right\} \tag{143}$$

Najkasniji početak aktivnosti se odredjuje polazeći od završnog dogadjaja idući ka početnom. U ovom slučaju operativna formula za retrogradni proračun „kasnih" početaka aktivnosti glasi:

$$t_i^{(1)} = \min_j \left\{ t_i^{(1)} - t_{ij} \right\} \tag{144}$$

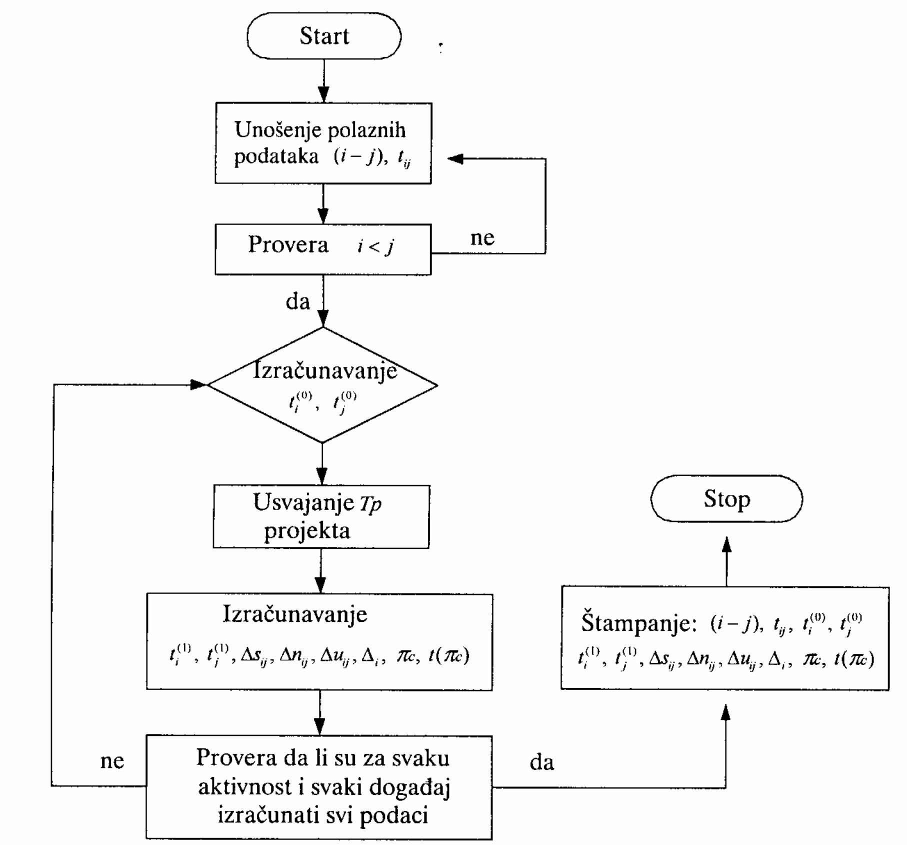
Kritični put je put koji se proteže od prvog dogadjaja (1) do zadnjeg dogadjaja (n), to je put koji ima najduže vreme trajanja i sadrži samo kritične aktivnosti, odnosno aktivnosti koje nemaju vremensku rezervu.

Ostali parametri se odredjuju na osnovu sledećih izraza:

- ukupna vremenska rezerva aktivnosti (i-j): $\Delta u_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - t_{ij}$
- slobodna vremenska rezerva aktivnosti (i-j): $\Delta s_{ij} = t_j^0 - t_i^0 - t_{ij}$
- nezavisna vremenska rezerva aktivnosti (i-j): $\Delta n_{ij} = t_j^0 - t_i^1 - t_{ij}$
- ukupna vremenska rezerva aktivnosti (i-j): $\Delta u_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - t_{ij}$
- vremenska rezerva u dogadjaju(i): $\Delta_i = t_i^1 - t_i^0$

Za potrebe analize u planiranju i upravljanju najvažnije su ukupne vremenske rezerve i vremenske rezerve u dogadjajima.

Blok dijagram toka formiranja i proračunavanja mrežnog dijagrama po metodi CPM je dat na slici 75.



Slika 75. Blok dijagram formiranja MD po metodi CPM

7.1.5. Analiza resursa

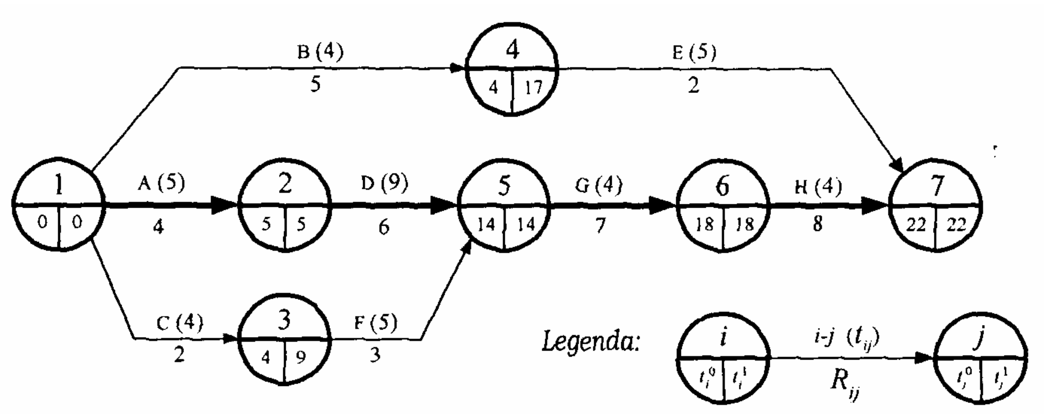
Analiza resursa predstavlja integralnu fazu u primeni metode CPM. Resursi, odnosno ograničenja mogu biti broj angažovanih radnika, raspoloživa novčana sredstva u datim vremenskim intervalima i slično. Analiza resursa će biti pojašnjena kroz sledeći primer, gde je broj radnika za realizaciju datog projekta ograničen.

Osnovni elementi projekta su dati u tabeli - matrici medjuzavisnosti (tabela 12).

Tabela 12.

		Posmatrana aktivnost							
		A	B	C	D	E	F	G	H
Prethodna aktivnost	A				X				
	B					X			
	C						X		
	D							X	
	E								
	F							X	
	G								X
	H								
Trajanje (dan)		5	4	4	9	5	5	4	4
Resurs (radnika/dan)		4	5	2	6	2	3	7	8

Mrežni dijagram sa upisanim resursom je prikazan na slici 76.

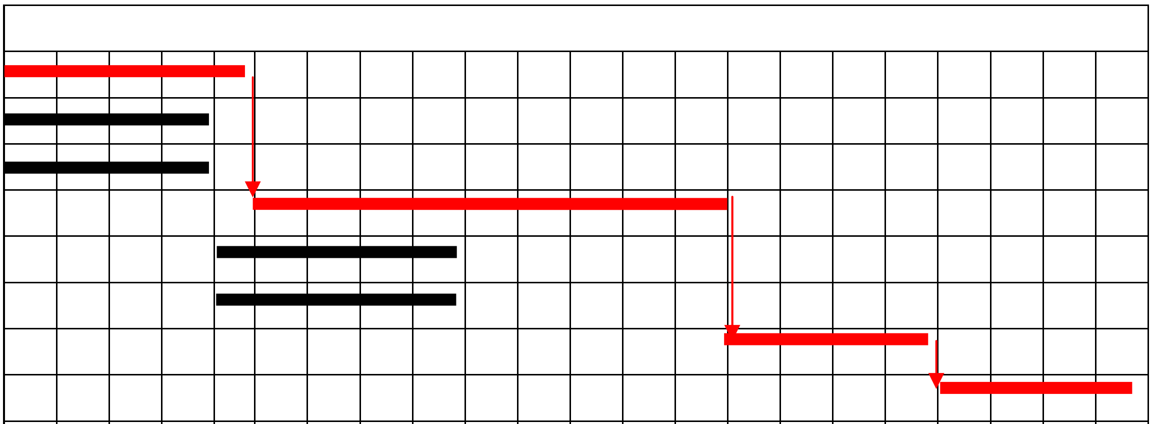


Slika 76. Mrežni dijagram projekta sa resursom

Kao što se vidi sa slike, kritični put se sastoji od aktivnosti A-D-G-H, sa ukupnim trajanjem realizacije projekta 22 dana.

Gantogram aktivnosti, napravljen prema najranijim počecima aktivnosti je dat na slici 77.

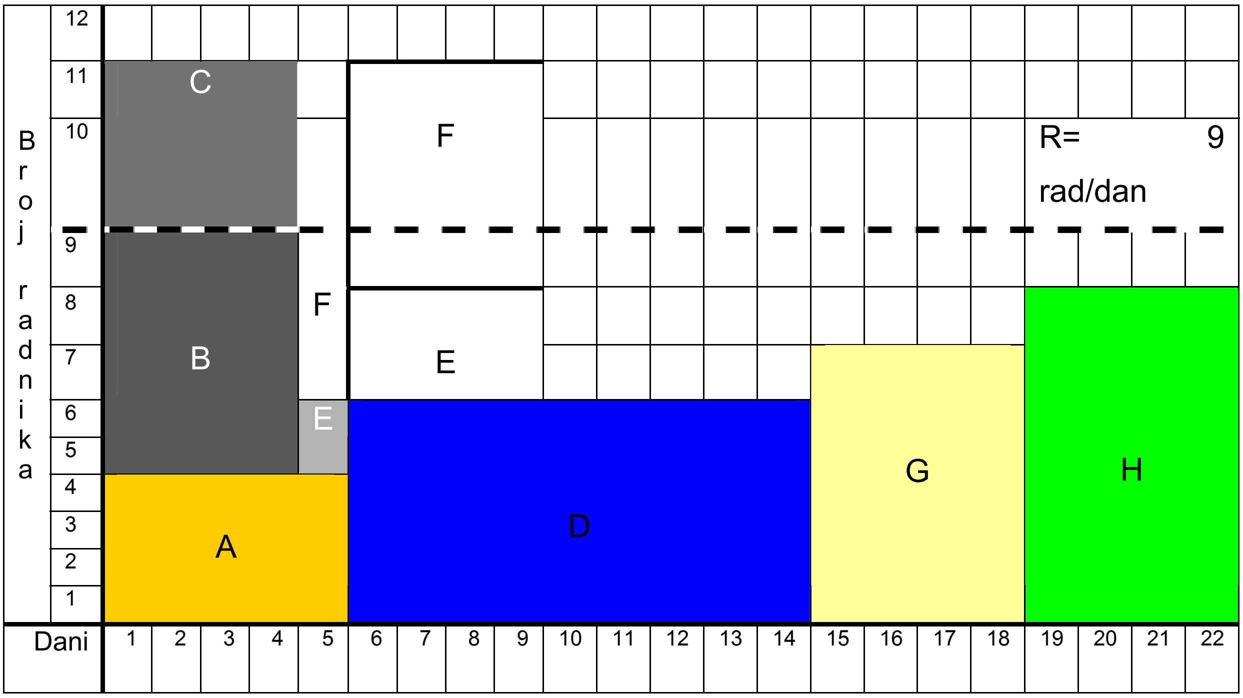
	t_{ij}	R_{ij}
A	5	4
B	4	5
C	4	2
D	9	6
E	5	2
F	5	3
G	4	7
H	4	8



Dani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Potreban resurs (radnika/dan)	11	11	11	11	9	11	11	11	11	6	6	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8

Slika 77. Gantogram najranijih početaka aktivnosti

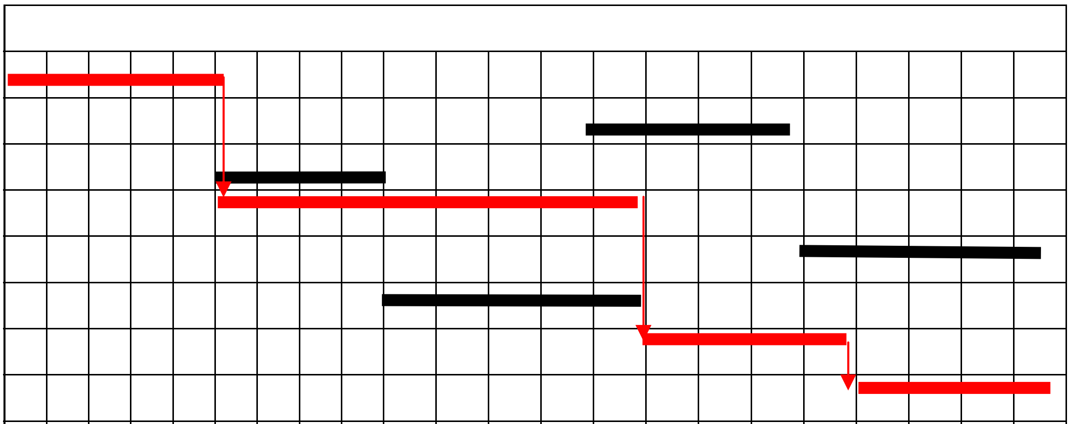
Histogram raspodele resursa pri najranijim počecima aktivnosti je dat na slici 78.



Slika 78. Histogram raspodele potrebnih resursa (radnika) po danima

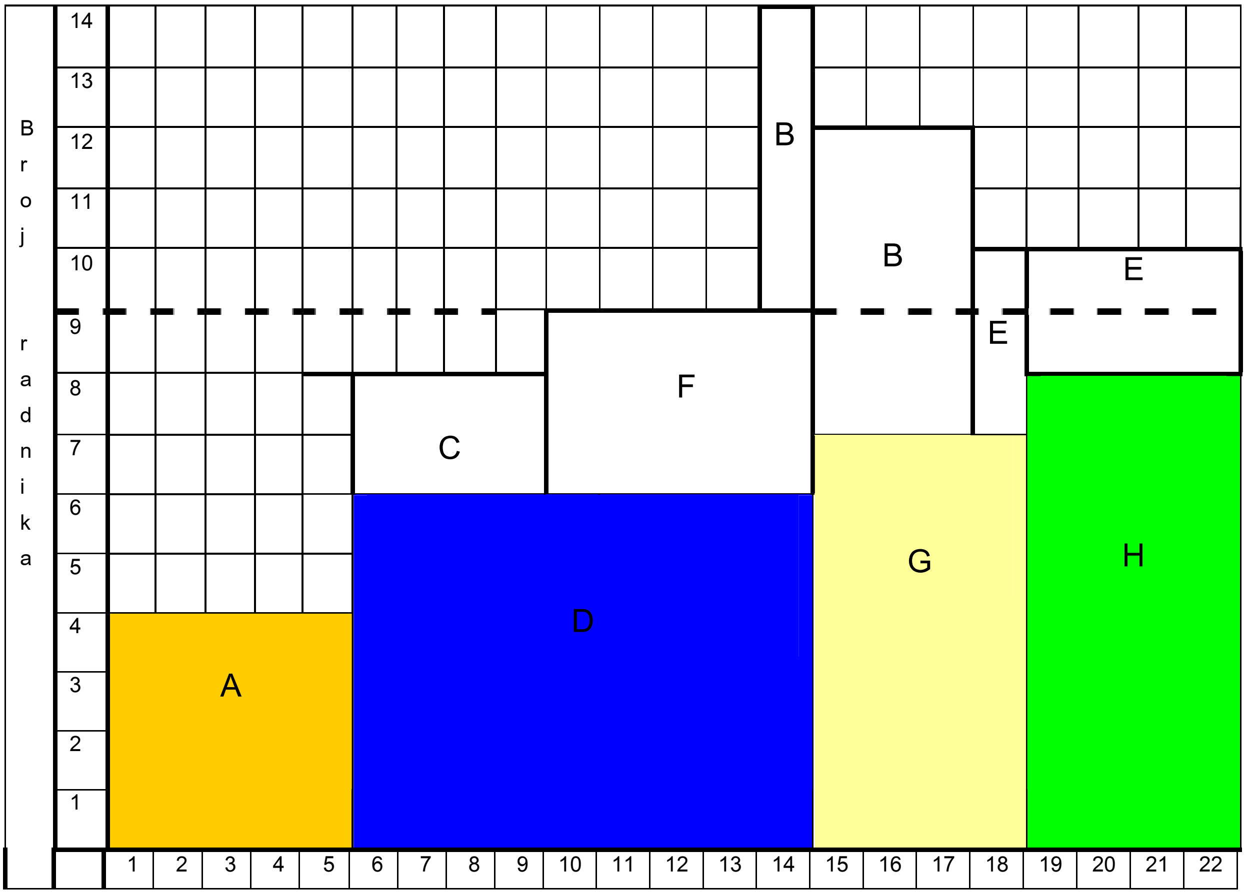
Kao što se sa histograma vidi, uz ograničene resurse, nije moguće realizovati zamišljeni projekat na ovakav način, odnosno, u danima 1- 9 se ne raspolaže dovoljnim brojem radnika, dok u periodu of 10 do 22 dana resurs nije potpuno iskorišćen. Sledeći korak je napraviti gantogram aktivnosti sa najkasnijim počecima pojedinih aktivnostima i odgovarajući histogram raspodele resursa, kao što je dato na slikama 79 i80.

	t_{ij}	R_{ij}
A	5	4
B	4	5
C	4	2
D	9	6
E	5	2
F	5	3
G	4	7
H	4	8



Dani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Potr. resurs (radnika/dan)	4	4	4	4	4	8	8	8	8	9	9	9	9	14	12	12	12	9	10	10	10	10

Slika 79. Gantogram najkasnijih početaka aktivnosti

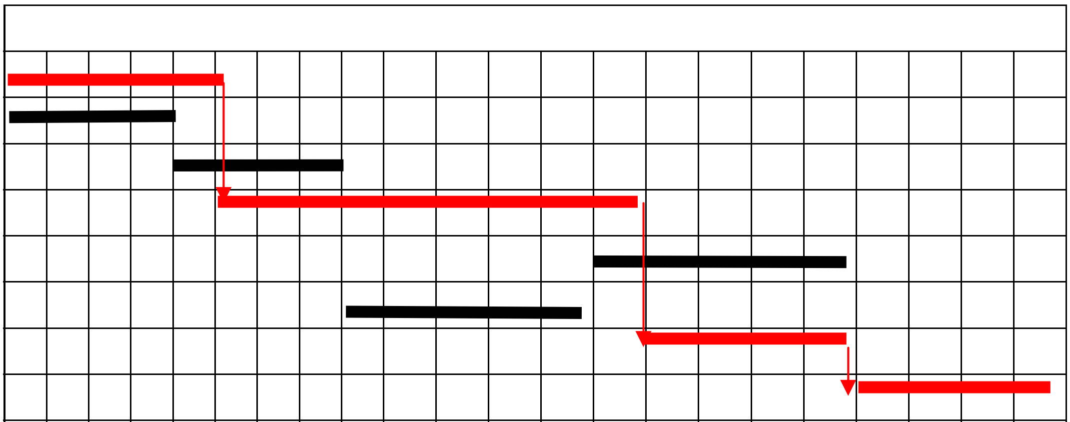


Slika 80. Histogram raspodele potrebnih resursa (radnika) po danima

Kao što se iz histograma vidi, problem i dalje nije rešen, već je samo potreba za većim brojem radnika od raspoloživog pomerena ka kraju projekta, od 13 do 22 dana trajanja projekta.

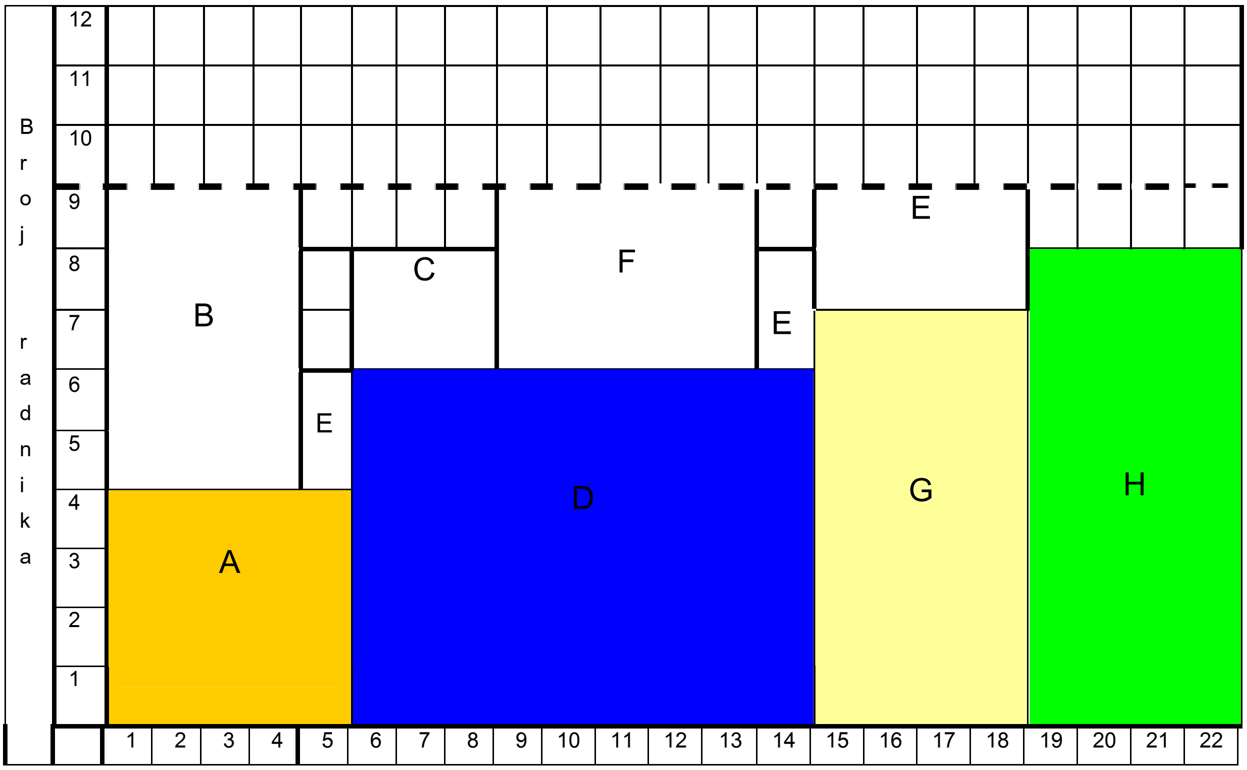
Koristeći heurističke metode uravnoteženja, dobija se rešenje sa optimalnim počecima/završecima aktivnosti i uravnoteženom raspodelom ograničenog resursa, kao što je dato na slikama 81 i 82.

	t_{ij}	R_{ij}
A	5	4
B	4	5
C	4	2
D	9	6
E	5	2
F	5	3
G	4	7
H	4	8



Dani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Potr. resurs (radnika/dan)	9	9	9	9	6	8	8	8	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	8	8	8	8

Slika 81. Gantogram sa uravnoteženim počecima aktivnosti



Slika 82. Uravnoteženi histogram raspodele potrebnih resursa (radnika) po danima

7.1.6. Primeri rešenih zadataka

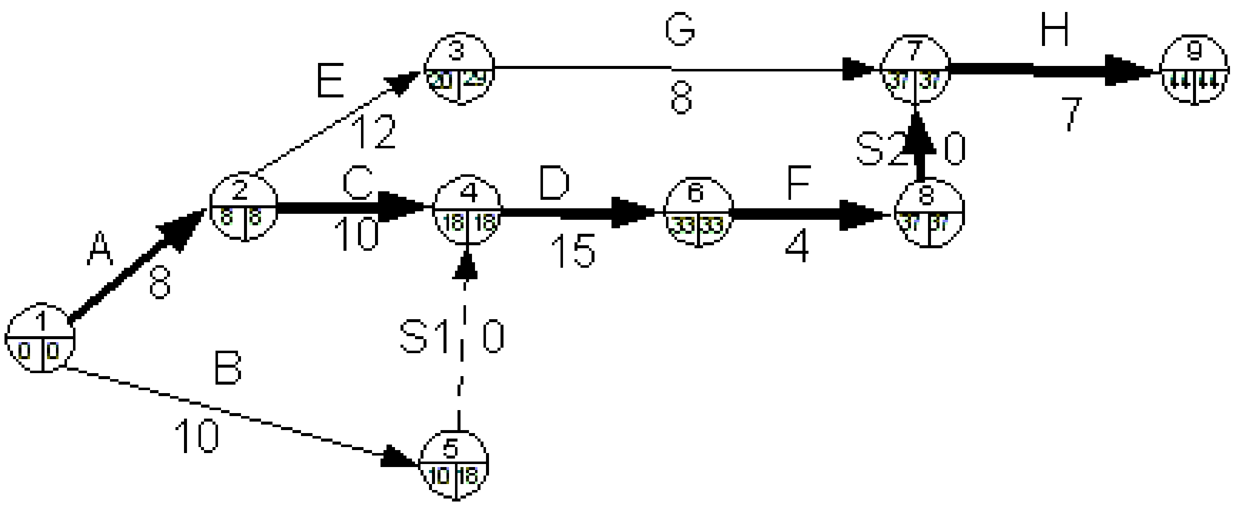
Primer 1.

Analizom projekta, rukovodilac projekta je sačinio sledeću matricu medjuzavisnosti aktivnosti.

		Posmatrana aktivnost							
		A	B	C	D	E	F	G	H
Prethodna aktivnost	A			X		X			
	B				X				
	C				X				
	D						X		
	E							X	
	F								X
	G								X
	H								
Trajanje aktivnosti (dani)		8	10	10	15	12	4	8	7

Uraditi:
a. projektovati mrežni dijagram;
b. odrediti najranija i najksanija vremena početka aktivnosti;
c. odrediti kritični put.

Rešenje je dato na slici 83.



Slika 83. Mrežni dijagram

Primer 2.

Realizacija projekta je zadata sledećom strukturalnom tabelom:

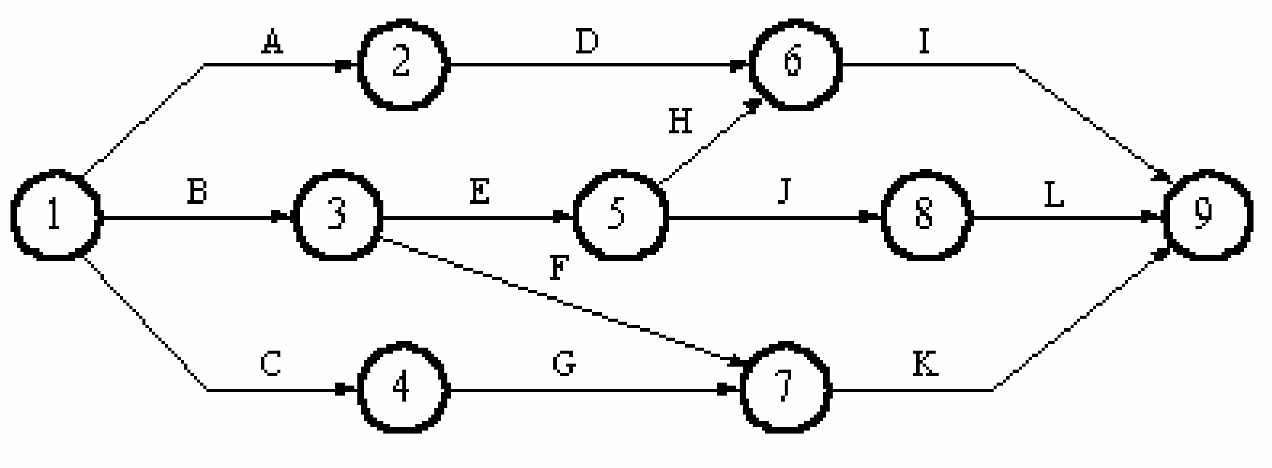
Aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Prethodna aktivnost	-	-	-	A	B	B	C	E	D,H	E	F,G	J
Trajanje (h)	8	6	5	9	4	7	10	5	7	3	4	2

Uraditi:

a. konstruisati mrežni dijagram;
b. odrediti kritični put i vreme završetka projekta;
c. odrediti vremenske rezerve u sistemu dogadjaja.

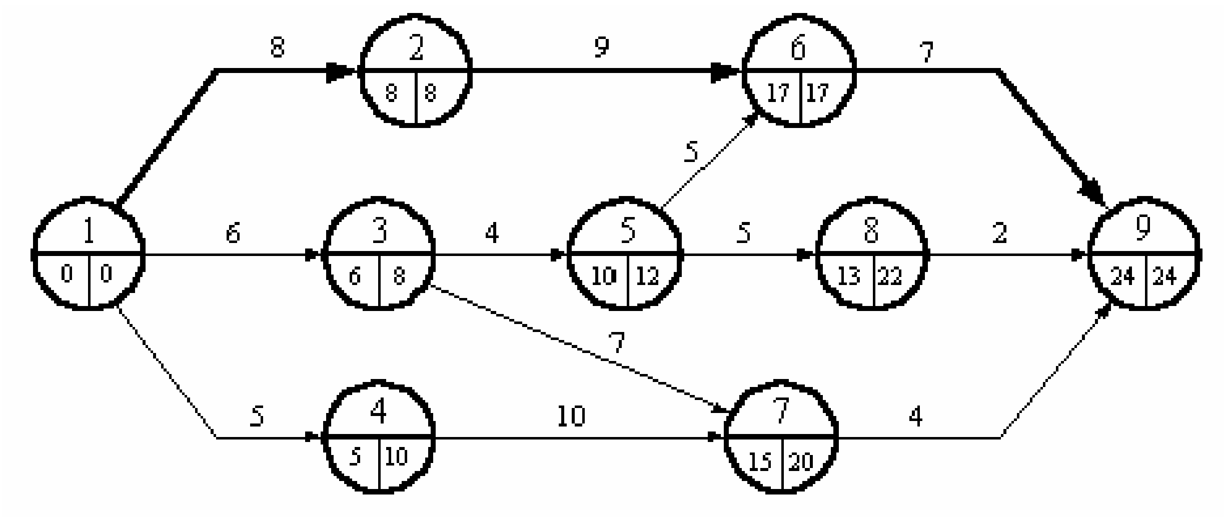
Rešenje:

a. Konstrukcija mrežnog dijagrama je data na slici 84.



Slika 85. Konstrukcija mrežnog dijagrama

b. Najraniji i završeci i najkasniji počeci aktivnosti i kritični put su dati na slci 85.



Slika 85. Najraniji i završeci i najkasniji počeci aktivnosti i kritični put

c. Vremenske rezerve

-Najraniji završetak aktivnosti: $t_j^{(0)} = \max_i \left\{ t_i^{(0)} + t_{ij} \right\}$ (dan)

$t_1^{(0)} = 0$ (усвајамо $t_1^{(0)} = 0$)

$t_2^{(0)} = t_1^{(0)} + t_{12} = 0 + 8 = 8$

$t_3^{(0)} = t_1^{(0)} + t_{13} = 0 + 6 = 6$

$t_4^{(0)} = t_1^{(0)} + t_{14} = 0 + 5 = 5$

$t_5^{(0)} = t_3^{(0)} + t_{35} = 6 + 4 = 10$

$t_6^{(0)} = \max \left\{ (t_2^{(0)} + t_{26}), (t_5^{(0)} + t_{56}) \right\} = \max \{17, 15\} = 17$

$t_7^{(0)} = \max \left\{ (t_3^{(0)} + t_{37}), (t_4^{(0)} + t_{47}) \right\} = \max \{13, 15\} = 15$

$t_8^{(0)} = t_5^{(0)} + t_{58} = 10 + 3 = 13$

$t_9^{(0)} = \max \left\{ (t_6^{(0)} + t_{69}), (t_7^{(0)} + t_{79}), (t_8^{(0)} + t_{89} \right\} = \max \{24, 19, 15\} = 24$

- Najkasniji početak aktivnosti: $t_i^{(1)} = \max_j \left\{ t_j^{(1)} - t_{ij} \right\}$ (dan)

$t_9^{(1)} = 24$ (усвајамо $t_9^{(0)} = t_9^{(1)}$)

$t_8^{(1)} = t_9^{(1)} - t_{89} = 24 - 2 = 22$

$t_7^{(1)} = t_9^{(1)} - t_{79} = 24 - 4 = 20$

$t_6^{(1)} = t_9^{(1)} - t_{69} = 24 - 7 = 17$

$t_5^{(1)} = \min \left\{ (t_6^{(1)} - t_{56}), (t_8^{(1)} - t_{58}) \right\} = \min \{12, 19\} = 12$

$t_4^{(1)} = t_7^{(1)} - t_{47} = 20 - 10 = 10$

$t_3^{(1)} = \min \left\{ (t_5^{(1)} - t_{35}), (t_7^{(1)} - t_{37}) \right\} = \min \{8, 13\} = 8$

$t_2^{(1)} = t_6^{(1)} - t_{26} = 17 - 9 = 8$

$t_1^{(1)} = \min \left\{ (t_2^{(1)} - t_{12}), (t_3^{(1)} - t_{13}), (t_4^{(1)} - t_{14} \right\} = \min \{0, 2, 5\} = 0$

Kritični put u mreži $t(\pi_c)$ (dan)

1)	(1-2) (2-6) (6-9)	$\Rightarrow$ 8+9+7 = 24	/дан/
2)	(1-3) (3-5) (5-6) (6-9)	$\Rightarrow$ 6+4+5+7 = 22	
3)	(1-3) (3-5) (5-8) (8-9)	$\Rightarrow$ 6+4+3+2 = 15	
4)	(1-3) (3-7) (7-9)	$\Rightarrow$ 6+7+4 = 17	
5)	(1-4) (4-7) (7-9)	$\Rightarrow$ 5+10+4 = 19	

Kritični put u mreži je najduži put, koji sačinjavaju aktivnosti koje nemaju vremenskih rezervi i iznosi:

$$t(\pi_c) = \sum_{ij \in \pi_c} t_{ij} = 24 \text{ (dan)}$$

Vremenske rezerve: $\Delta_i = t_i^{(1)} - t_i^{(0)}$

$\Delta_1 = t_1^{(1)} - t_1^{(0)} = 0 - 0 = 0$, $\Delta_2 = t_2^{(1)} - t_2^{(0)} = 8 - 8 = 0$, $\Delta_3 = t_3^{(1)} - t_3^{(0)} = 8 - 6 = 2$,
$\Delta_4 = t_4^{(1)} - t_4^{(0)} = 10 - 5 = 5$, $\Delta_5 = t_5^{(1)} - t_5^{(0)} = 12 - 10 = 2$, $\Delta_6 = t_6^{(1)} - t_6^{(0)} = 17 - 17 = 0$,
$\Delta_7 = t_7^{(1)} - t_7^{(0)} = 20 - 15 = 5$, $\Delta_8 = t_8^{(1)} - t_8^{(0)} = 22 - 13 = 9$, $\Delta_9 = t_9^{(1)} - t_9^{(0)} = 24 - 24 = 0$.

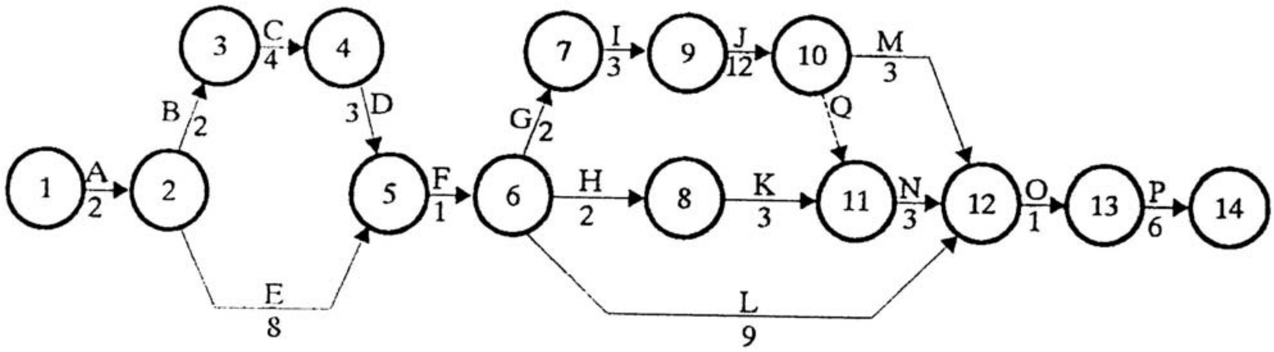
Primer 3.

Za uopšteni investicioni projekat, čija je realiazija definisana sledećom matricom medjuzavisnosti aktivnosti konstruisati MD i odrediti kritični put.

	Posmatrana aktivnost															
Predhodna aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A		x			x											
B			x													
C				x												
D						x										
E						x										
F							x	x				x				
G									x							
H											x					
I										x						
J													x	x		
K														x		
L															x	
M															x	
N															x	
O																x
P																

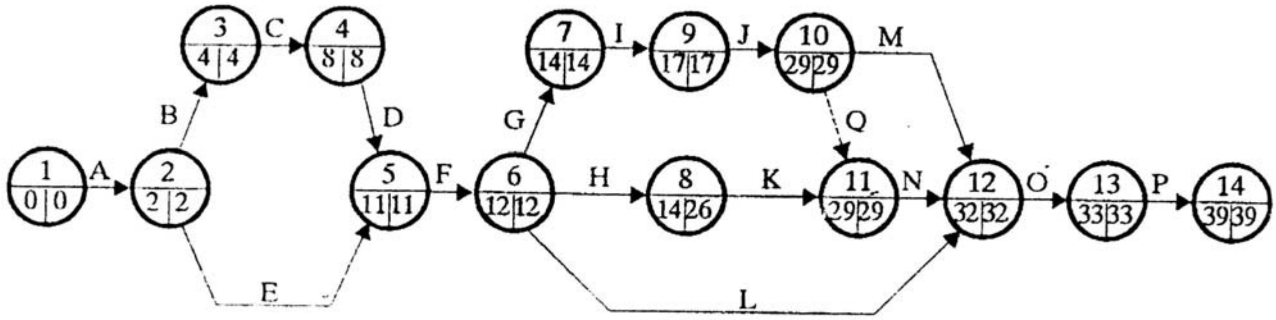
Rešenje:

Konstrukcija mrežnog dijagrama:



Slika 86. Konstrukcija mrežnog dijagrama

Proračun najranijeg završetka i najkasnijeg početka aktivnosti i kritični put su dati na slici 87.



Slika 87. MD sa proračunatim vremenima

Kritični put: A-B-C-D-F-G-I-J-Q-M-N-O-P

7.2. PERT metoda

Kod nekih projekata jednostavno nije moguće egzaktno, na osnovu proračuna, ili na osnovu iskustva odrediti, odnosno normirati vreme trajanja pojedinih aktivnosti. Ovo se prvenstveno odnosi na istraživačke i razvojne projekte. Za ovakve projekte se odredjuju tri vremenske veličine (scenarija) i to:

- a_{ij} – optimističko vreme izvršenja pojedinih aktivnosti (i – j), kao najkraće predviđeno vreme realizacije određene aktivnosti. Ovo vreme je procenjeno vreme za koje se smatra da je moguće završiti datu aktivnost, uz idealno ispunjene sve uslove, sto je malo verovatno.
- m_{ij} – najverovatnije (modalno) vreme izvršenja aktivnosti (i – j). Verovatnoća realizacije određene aktivnosti za ovo vreme veća je od verovatnoće izvršenja aktivnosti u odnosu na vrednost optimističke procene vremena, ali manja od najvećeg tzv. pesimističkog vremena. U statističkom smislu to je vreme sa najvećom frekvencijom pojavljivanja.
- b_{ij} – pesimističko vreme izvršenja aktivnosti (i – j) je najduži procenjeni interval izvršenja određene aktivnosti. Ono pokazuje koliko dugo može do traje jedna aktivnost i da se konačno završi.

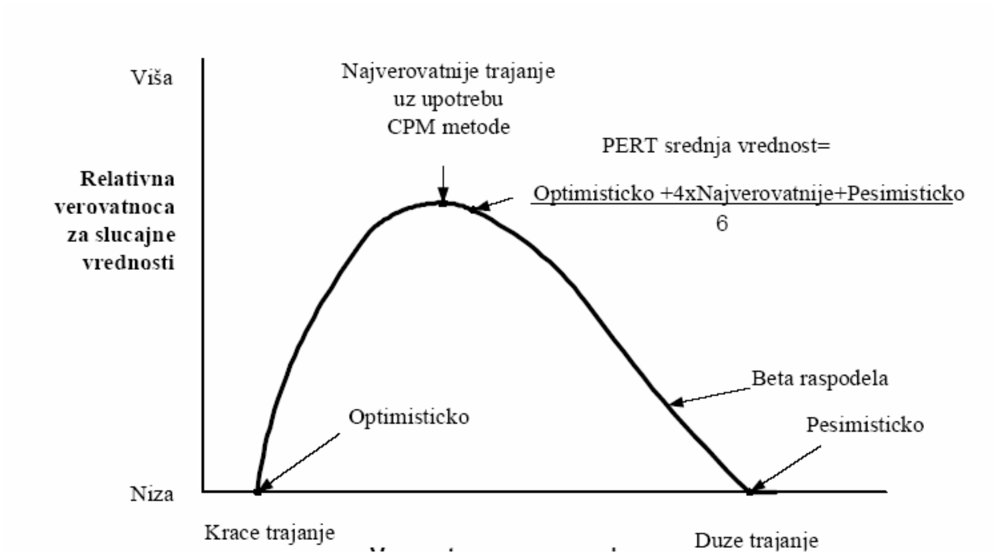
Za vremensku analizu po metodi PERT od posebnog su interesa sledeće algebarske (matematičke) vrednosti:

- te_{ij}- očekivano vreme, kao matemetička sredina, i
- D_{ij}+= σ^2_{ij} – disperzija, odnosno varijansa vremena trajanja aktivnosti i-j,

Ove vrednosti se dobijaju za svaku aktivnost (i – j) na osnovu prethodno definisanih vrednosti parametara a_{ij}, m_{ij}, b_{ij}. Pri proračunu ovih vremenskih veličina, polazi se od toga da važe sledeće pretpostavke:

- trajanje svih aktivnosti (i – j), se kao slučajna promenljiva pokorava zakonu beta β – raspodele,
- trenutak završetka sumarnih aktivnosti (npr. kritičnog puta) odigrava se po zakonu normalne N – raspodele.

Grafik funkcije gustine β – raspodele je dat na slici 88.



Slika 88. Funkcija funkcije gustine β – raspodele e

Očekivano vreme realizacije aktivnosti i-j, se dobija kao matematičko očekivanje za slučajnu promenjlivu koja se pokorava β – raspodeli kao:

$$Te_{ij} = M(t) = \frac{a_{ij} + 4 \bullet m_{ij} + b_{ij}}{6} \tag{145}$$

Disperzija slučajne veličine, odnosno srednje kvadratno odstupane se dobijaju kao:

$$D_{ij}(t) = \sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right)^2 ;..\sigma_{ij} = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6} \right) \tag{146}$$

Proračun najranijih i najkasnijih početaka aktivnosti je u principu isti kao kod CPM metode, stim što se kod PERT metode računa sa očekivanim vrednostima. Najraniji počeci aktivnosti se odredjuju proračunom unapred, od prve aktivnosti, kao:i najranij

$$te_j^{(0)} = \max_i \left\{ te_i^{(0)} + te_{ij} \right\} \tag{147}$$

Najkasniji početak aktivnosti se odredjuje polazeći od završnog dogadjaja idući ka početnom. U ovom slučaju operativna formula za retrogradni proračun „kasnih" početaka aktivnosti glasi:

$$te_i^{(1)} = \min_j \left\{ te_j^{(1)} - te_{ij} \right\} \tag{148}$$

Vremenska rezerva odredjenog dogadjaja Δe_i, predstavlja vremensku razliku između očekivanog najkasnijeg i najranijeg vremena nastupanja posmatranog i-tog (ili j-tog) dogadjaja i izračunava se kao:

$$\Delta e_i = te_i^{(1)} - te_i^{0} ;..za..i = 1, n-1 \tag{149}$$

Očekivana vremenska rezerva u dogadja može biti pozitivna ili jednaka nuli, pri čemu pozitivna vremenska rezerva inicira mogućnost završetka neke aktivnosti pre planiranog roka (imamo višak kapaciteta), dok vremenska rezerva koja je jednaka nuli pokazuje da su kapaciteti procenjeni kao adekvatni, ali istovremeno i kritični.

U projektu je od posebnog interesa odredjivanje verovatnoće ispunjavanja planiranih rokova. Ako se sa Tp ozbači planirani rok odigravanja nekog dogadjaja, pri čemu to može biti i završni dogadjaj, odnosno, kraj projekta, a sa z odgovarajući faktor verovatnoće, koji se može izračunati kao standardizovana (centrirana) vrednost sume aktivnosti na kritičnom putu, kao

$$z = \frac{T_p - t_e}{\sqrt{\sigma^2}} \tag{150}$$

gde su:

$\sigma^2 = \sum \sigma_{ij}^2$ - zbir disperzija svih trajanja aktivnosti na kritičnom putu (put sa najdužim vremenom) do razmatranog dogadjaja.

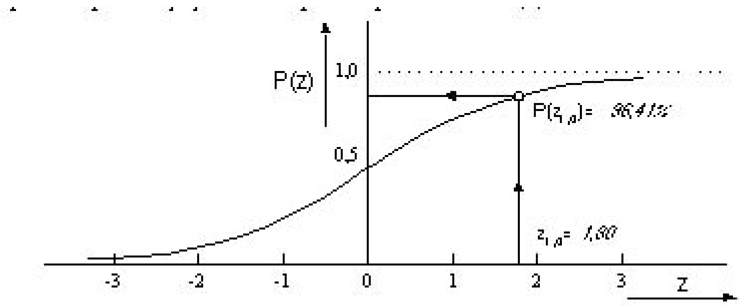
$t_e = \sum te_{ij}$ - zbir očekivanih vremena trajanja aktivnosti (i – j) do razmatranog dogadjaja.

Ako se traži verovatnoća okončanja projekta, razmatrani dogadjaj je kraj prokjekta.

Verovatnoća odigravanja dogadjaja u funkciji faktora verovatnoće z se nalazi iz zakona standardizovane normalne raspodele kao:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bullet \int_{-\infty}^{t} \exp(-\frac{x^2}{2})dx \qquad (151)$$

Grafička predstava funkcije raspodele verovatnoće P(z) je data na slici 89.



Slika 89. Funkcije raspodele verovatnoće P(z)

Vrednosti funkcije *P*(*z*) najčešće se predstavljaju tabelarno, kao što je i dato u tabeli 27, iz koje se za izračunatu vrednost faktora verovatnoće z direktno može odrediti verovatnoća odigravanja razmatranog dogadjaja.

Tabela 10.

z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)	z	P(z)
-3,0	0,0013	-1,5	0,0668	0,0	0,5000	1,5	0,9332
-2,9	0,0019	-1,4	0,0808	0,1	0,5398	1,6	0,9452
-2,8	0,0026	-1,3	0,0968	0,2	0,5793	1,7	0,9554
-2,7	0,0035	-1,2	0,1151	0,3	0,6179	1,8	0,9641
-2,6	0,0047	-1,1	0,1357	0,4	0,6554	1,9	0,9713
-2,5	0,0062	-1,0	0,1587	0,5	0,6915	2,0	0,9772
-2,4	0,0082	-0,9	0,1841	0,6	0,7257	2,1	0,9821
-2,3	0,0107	-0,8	0,2119	0,7	0,7580	2,2	0,9861
-2,2	0,0139	-0,7	0,2420	0,8	0,7881	2,3	0,9893
-2,1	0,0179	-0,6	0,2743	0,9	0,8159	2,4	0,9918
-2,0	0,0228	-0,5	0,3085	1,0	0,8413	2,5	0,9938
-1,9	0,0287	-0,4	0,3446	1,1	0,8643	2,6	0,9953
-1,8	0,0359	-0,3	0,3821	1,2	0,8849	2,7	0,9965
-1,7	0,0446	-0,2	0,4207	1,3	0,9032	2,8	0,9974
-1,6	0,0548	-0,1	0,4602	1,4	0,9192	2,9	0,9981
Графички приказ кумулативне криве вероватноће P(z)						3,0	0,9987

7.2.1. Primeri rešenih zadataka po PERT metode

Primer 1.

Realizacija projekta osvajanja novog proizvoda je zadata preko sledeće matrice medjuzavisnosti.

		Posmatrana aktivnost													
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O
Prethod. aktivn.	A				x										
	B					x	x								
	C							x	x						
	D					x	**x**								
	E									**x**					
	F										**x**	**x**			
	G										x	x			
	H												x		
	I													x	
	J													x	
	K														x
	M														
	N														
	O														
Vreme (dan)	Opt. a_{ij}	1,5	2	2	1	3	3	2	4	1	2	5	2	3,5	2
	Modal. m_{ij}	3	3	2,5	1,5	5	6	2,5	5	2	3	5,5	4	4	3
	Pesim. b_{ij}	3,5	4	3	2,5	7	7	3,5	5	4	6	6,5	7	5,5	5

Odrediti

a. Projektovati mrežni dijagram.

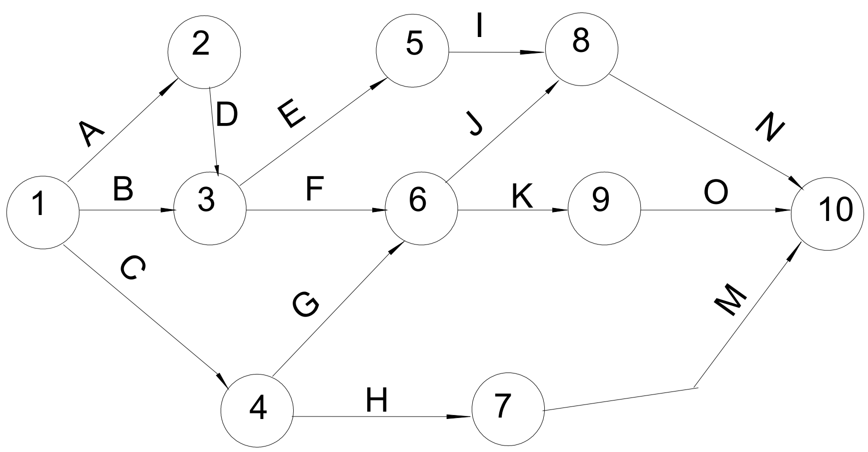
b. Odrediti očekivano vreme te_{ij} (dan) i disperziju D_{ij} (dan^2), za svaku aktivnost.

c. Odrediti očekivani kritičan put π_c.

d. Izračunati verovatnoću nastupanja završnog događaja, ako je planirano vreme završetka kritičnih aktivnosti Tp =20 (dan)

Rešenje:

a) Mrežni dijagram je dat na slici 90.



Slika 90. Konstrukcija MD

a. Očekivano vreme te_{ij} (dan) i disperzija D_{ij} (dan^2) aktivnosti

Očekivano vreme trajanja aktivnosto se računa po formuli:

$$Te_{ij} = M(t) = \frac{a_{ij} + 4 \bullet m_{ij} + b_{ij}}{6}.$$

Disperzija vremena se računa po formuli: $D_{ij}(t) = \sigma_{ij}^2 = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}\right)^2 ;..\sigma_{ij} = \left(\frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}\right).$

Sredjeni podaci su dati u sledećoj tabeli:

Aktivnost (i-j)	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	M	N	O
Očekivano vreme te_{ij}	2,83	3	2.5	1.58	5	5.67	2.58	4.83	2.16	3.33	5.58	4.16	4.16	3.33
Disperzija D_{ij}	1/9	1/9	1/36	1/16	4/9	4/9	1/16	1/36	¼	4/9	1/16	25/36	1/9	4/9

b. Odrediti očekivani kritičan put π_c.

Očekivani kritični put se može dobiti odredjivanjem najranijih i najkasnijih početaka aktivnosti i identifikacijom aktivnosti koje nemaju vremensku rezervu. Kritični put je takodje i najduži (po vremenu) put u mreži, pa se može identifikovati i na ovaj način, što će biti primenjeno u ovom zadatku.

π_1: 1-2-3-5-8-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_1) = te_{12} + te_{23} + te_{35} + te_{58} + te_{8,10} = 2{,}83+1{,}58+5+2{,}16+4{,}16 = 15{,}73$ /тј/

π_2: 1-2-3-6-8-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_2) = te_{12} + te_{23} + te_{36} + te_{68} + te_{8,10} = 2{,}83+1{,}58+5{,}67+3{,}33+4{,}16 = 17{,}57$

π_3: 1-2-3-6-9-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_3) = te_{12} + te_{23} + te_{36} + te_{69} + te_{9,10} = 2{,}83+1{,}58+5{,}67+5{,}58+3{,}33 = 19$

π_4: 1-3-5-8-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_4) = te_{13} + te_{35} + te_{58} + te_{8,10} = 3{,}00+5{,}00+2{,}16+4{,}16 = 14{,}32$

π_5: 1-3-6-8-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_5) = te_{13} + te_{36} + te_{68} + te_{8,10} = 3{,}00+5{,}67+3{,}33+4{,}16 = 16{,}16$

π_6: 1-3-6-9-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_6) = te_{13} + te_{36} + te_{69} + te_{9,10} = 3{,}00+5{,}67+5{,}58+3{,}33 = 17{,}58$

π_7: 1-4-7-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_7) = te_{14} + te_{47} + te_{7,10} = 2{,}50+4{,}83+4{,}16 = 11{,}49$

π_8: 1-4-6-8-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_8) = te_{14} + te_{46} + te_{68} + te_{8,10} = 2{,}50+2{,}58+3{,}33+4{,}16 = 12{,}57$

π_9: 1-4-6-9-10 $\Rightarrow$ $t(\pi_9) = te_{14} + te_{46} + te_{69} + te_{9,10} = 2{,}50+2{,}58+5{,}58+3{,}33 = 14$

Kritični put $\pi_c = \pi_3$, na njemu se nalaze dogadjaji 1-2-3-6-9-10, a sačinjavaju ga aktivnosti A-D-E-K-O.

c. Verovatnoću završetka projekta za *Tp* =20 (dan)

$$z = \frac{Tp - t(\pi_c)}{\sqrt{\sum_{ij \in \pi_c} \sigma_{ij}^2}} = \frac{Tp - t(\pi_3)}{\sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{36}^2 + \sigma_{69}^2 + \sigma_{9,10}^2}} = \frac{20-19}{\sqrt{1/9 + 1/16 + 4/9 + 1/16 + 4/9}} = 0{,}943$$

Za faktor verovatnoće $z = 0{,}943$ iz tabele 27, interpolacijom se dobija verovatnoća završetka projekta za 20 dana, koja iznosi:

$$P(z) = P(0{,}943) = 0{,}8268 \quad (82{,}68\%)$$

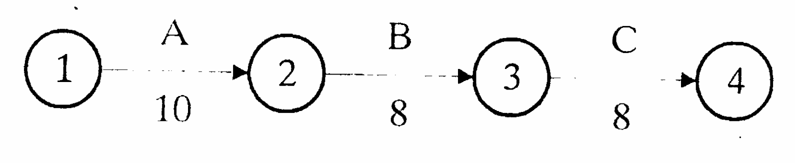
7.3. Metoda ″prvenstva″ (PDM - Precedence Diagramming Method))

Jedan od nedostataka CPM i PERT metode se ogledao u nemogućnosti, ili teškom načinu prikazivanja preklapanja aktivnosti, što se može ilustrovati sledečim jednostavnim primerom.

Neka se radi projekat vodovoda. Glavni plan se sastoji pd sledećih aktivnosti:

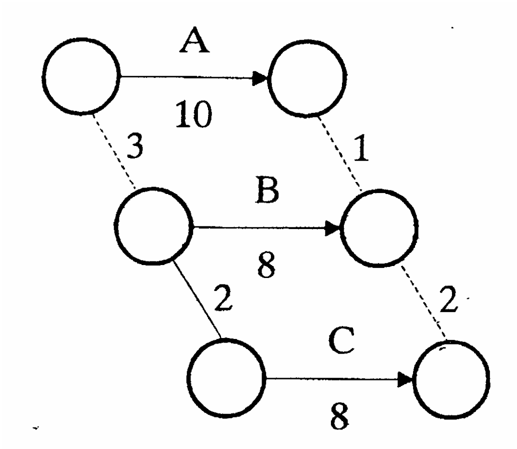
- ✓ Aktivnost A: Iskop zemlje (kanala) u trajanju od IO dana,
- ✓ Aktivnost B: Postavljanje cevi u trajanju od 8 dana,
- ✓ Aktivnost C: Zatrpavanje kanala u trajanju od 8 dana.

Uobičajeni mrežni dijagram sa sukcesivnim redjanjem aktivnosti je dat na slici 91.



Slika 91. Mrežni dijagram sa sukcesivnim odvijanjem aktivnosti.

Ukupno trajanje ovako zamišljenog projekta je 26 dana. Pitanje je da li mora da projekat traje 26 dana, odnosno, da li mora da se završi aktivnost A kopanje kanala do kraja pa da počne polaganje cevi (aktivnost B), odnosno da početak aktivnosti C (zatrpavanje kanala) čeka da se sve cevi polože, odnosno da se završi aktivnost B. Naravno da ne mora. Kod CPM metode može se pristupiti formiranju stepenastog mrežnog dijagrama, sa uvodjenjem fiktivnih aktivnosti, dijagrama, kao što je dato na slici 92.



Slika 92. Stepenasti mrežni dijagram

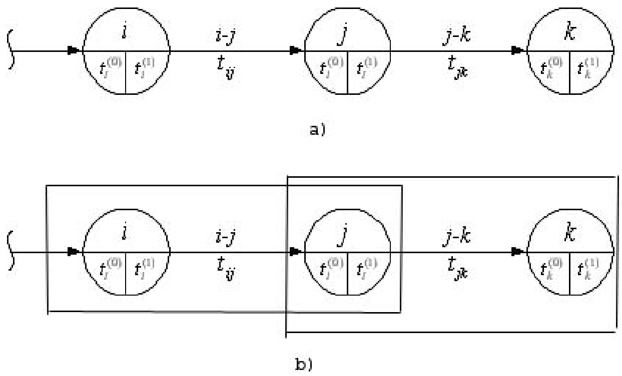
Kao sto se vidi iz dijagrama t *B* može otpoceti 3 dana nakon početka aktivnosti *A,* a aktivnost C sa 2 dana zakašnjenja u odnosu na aktivnost B. Na ovaj način je očuvana tehnološka zavisnost izmedju aktivnosti, obezbedjeno paralelno, istovremeno odvijanje više aktivnosti, a rok završetka posla je sada: T=3+2+8=13 dana.

Kaskadni (stepenasti) dijagrami se kod većeg broja aktivnosti veoma usložnjavaju i postaju nepregledi, što nije slučaja kod PDM metoda, i što predstavlja jednu od njegovih prednosti.

Osnovne karakteristike PD-metode su:

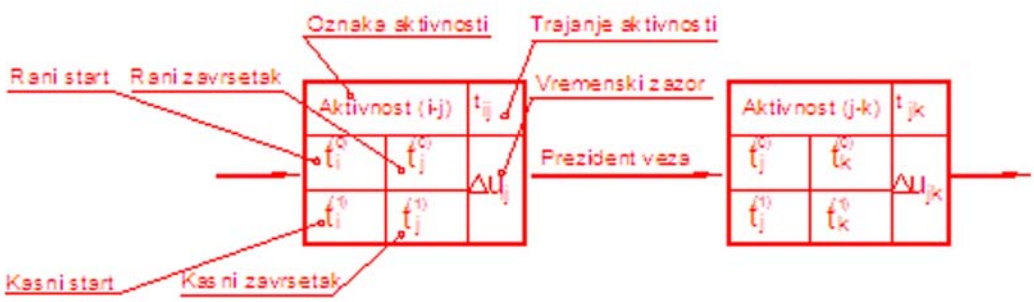
1. Proračun vremenskih parametara

Proračun osnovnih parametara PDM mrežnog plana vezan je za aktivnosti, a ne za događaje. Po PD metodi čvorovi u mreži, na osnovu analize strukture, predstavljaju definisane aktivnosti. U tom smislu, PD metod koristi za bazu AON tehniku (*Activity On The Node*), odnosno tehniku „aktivnost na čvoru”, za razliku od ADM tehnike (*Arrow Diagram Method*), tj. tehnike „aktivnost na strelici”, kojom je topološki strukturiran CPM, odnosno PERT model. Može se reći da su mrežni dijagrami kod CPM i PDM metoda zapravo inverzno orijentisani grafovi aktivnosti i događaja. Ilustracija je data na slici 93, pri čemu je pod a. dat deo CPM mrežnog dijagrama sa prikazom aktivnosti i-j i j-k, a pod b prikaz istih tih aktivnosti.



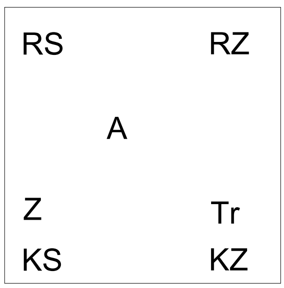
Slika 93. Prikaz aktivnosti kod CPM i PDM metode

Kao što je i ranije rečeno, aktivnosti se kod PD metoda prikazuju pmoću pravougaonika, u kojima se upisuju svi relevantni podaci za posmatranu aktivnost. Izmedju aktivnosti su strelice, koje pokazuju samo tehnološku uslovljenost. Najčešći slučaj prikazivanja aktivnosti u PDM dijagramu je dat na slici 94.



Slika 94. Najčešći način prikazivanja aktivnosti u PDM dijagramu

Ponegde se sreće i način prikazivanja aktivnosti kao što je dato na slici 95. Ovaj način sadrži iste podatke kao prethodni.



RS - Rani Start
RZ - Rani Završetak
A - Oznaka Aktivnosti
Z - Vremenski Zazor
Tr - Trajanje Aktivnosti
KS - Kasni Start
KZ - Kasni Završetak

Slika 95. Mogući način prikazivanja aktivnosti u PDM dijagramu

2. Pravila za konstruisanje

Ne postoje specijalna pravila za konstrukciju orijentisanog grafa PDM, jer se aktivnosti spajaju linijama i strelicama direktno, u skladu sa prethodno formiranom matricom uslovljenosti izvođenja aktivnosti i redosleda događaja. Karakteristika PD metode je, i, ta što početak i/ili završetak mrežnog plana može biti izražen sa jednim ili većim brojem aktivnosti, u zavisnosti sa koliko je aktivnosti potrebno projekat MD započeti, odnosno završiti.

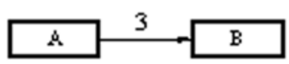
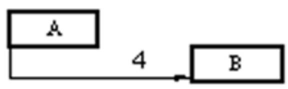
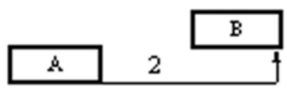
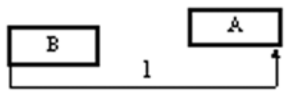
U mreži nema fiktivnih aktivnosti. Formalno se može uvesti jedna fiktivna aktivnost ispred početnih i/ili jedna iza završnih aktivnosti, u cilju potpunijeg izražavanja mrežnog dijagrama kao kod klasičnog CPM.

Preklapajuće aktivnosti i aktivnosti sa pomakom, tj. vremenskom distancom u realizacijama, na jednostavan način se prikazuju u mrežnom dijagramu, što predstavlja jednu od osnovnih prednosti PDM.

3. Tipovi veza kod PDM dijagrama

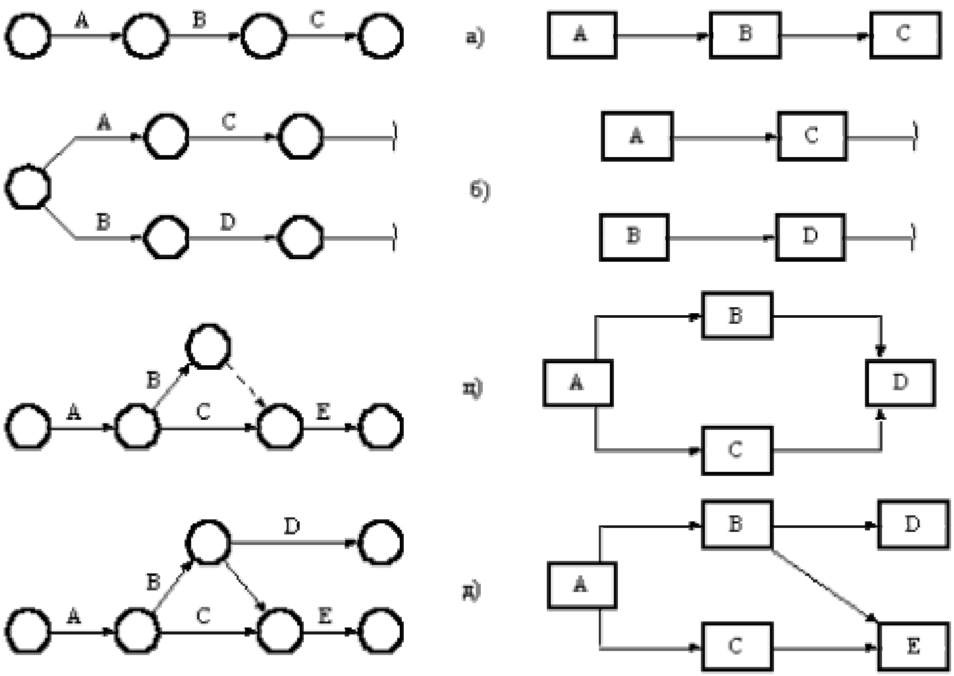
U modelima oblikovanim na osnovama ADM strukture (CPM i PERT), postojao je samo jedan tip veze između aktivnosti. Ta veza je konvencionalna i podrazumeva jasan stav da aktivnost prethodnika mora biti završena pre početka aktivnosti sledbenika. PDM metod raspolaze sa ukupno četri tipa veza, koje poboljšavaju njegove performanse. Tipovi veza su dati u tabeli 11.

Tabela 11.

Tip veze	Grafički prikaz	Objašnjenje
Kraj na početak (Finiš to Start)		Aktivnost B ne može početi dok ne prodje 3 v.j. od završetka aktivnosti A.
Početak na početak (Start to Start)		Aktivnost B može početi tek nakon 4 v.j. od početka aktivnosti A.
Kraj na kraj (Finish to Finish)		Aktivnost B se ne može završiti dok ne prodjue 2 v.j. od završetka aktivnosti A.
Početak na kraj (Start to Finish)		Akrivnost A se ne može završiti dok ne prodje 1 v.j. od početka aktivnosti B

4. Transformacija dijagrama

Transformacija PDM mrežnog dijagrama CPM je teško, često i nemoguće potpuno izvesti, iz razloga postojanja četiri tipa veza prisutnih kod PDM-a. Obrnut postupak transformacije je u principu izvodljiv. Elementarni primeri su dati na slici 96.



Slika 96. Transformacija CPM u PDM mrežni dijagram

5. Analiza vremena

Analiza vremena se izvodi na isti način kao kod CPM metode, pošto se proračunavaju zapravo ista vremena. Nalaženje najranijih početaka aktivnosti se vrši proračunom unapred, dok se nalaženje najksanijih početaka aktivnosti vrši proračunom unazad.

Konstruisanje i analiza vremena će biti pokazana kroz primere rešenih zadataka.

7.3.1. Primeri rešenih zadataka

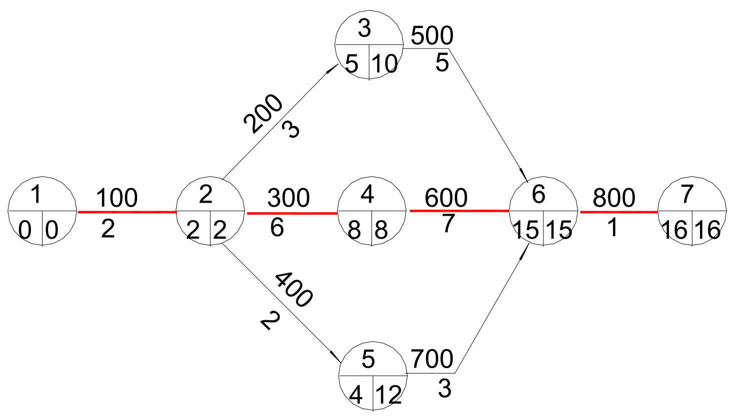
Primer 1.

Realizacija nekog projekta je definisana sledećom matricom medjuzavisnosti. Realizaciju projekta prikazati mrežnim dijagramima i to po CP metodi i PD metodi.

		Posmatrana aktivnost							
		100	200	300	400	500	600	700	800
Prethodna aktivnost	100		X	X	X				
	200					X			
	300						X		
	400							X	
	500								X
	600								X
	700								X
	800								
Trajanje akt. (h)		2	3	6	2	5	7	3	1

Rešenje:

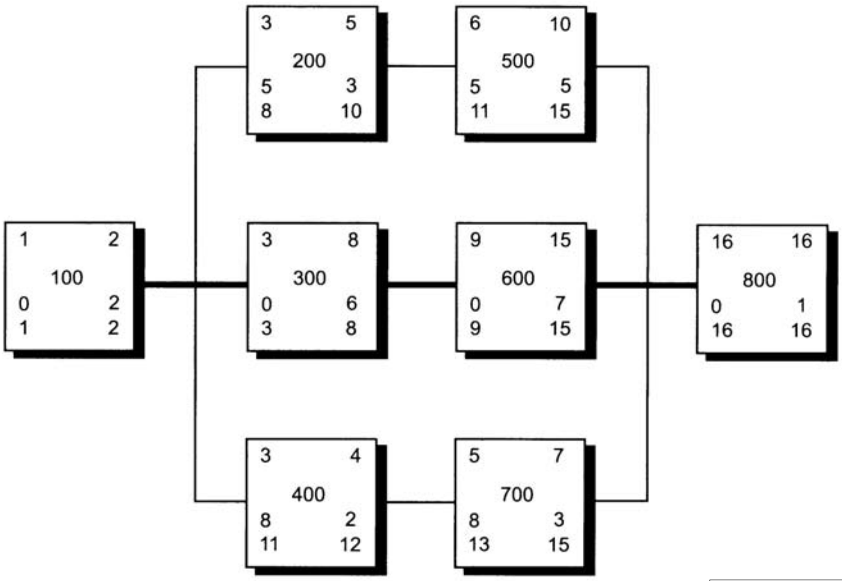
a. CPM mrežni dijagram je prikazan na slici 97.



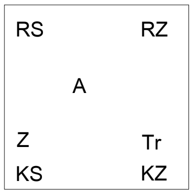
Slika 97. CPM mrežni dijagram

Za realizaciju projekta je potrebno 16 sati. Kritični put čine aktivnosti 100-300-500-800.

b. PDM mrežni dijagram je prikazan na slici 98.



Napomena: Korišćeno je označavanje aktivnosti :



RS - Rani Start
RZ - Rani Završetak
A - Oznaka Aktivnosti
Z - Vremenski Zazor
Tr - Trajanje Aktivnosti
KS - Kasni Start
KZ - Kasni Završetak

Slika 98. PDM mrežni dijagram

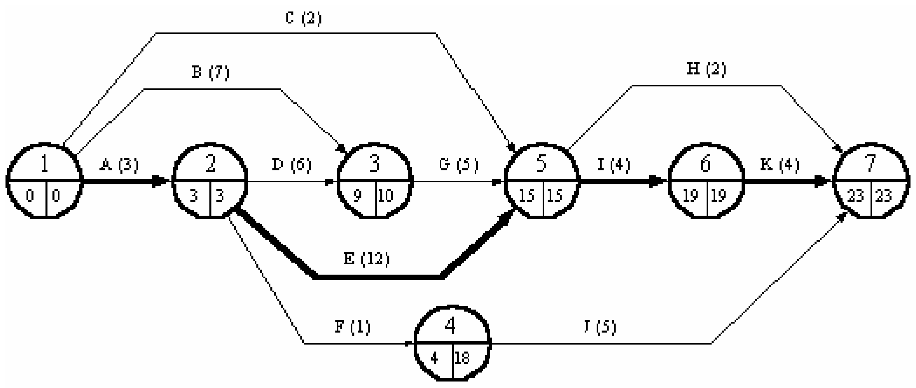
Primer 2.

Za projekat koji je zadat tabelom medjuzavisnosti aktivnosti identifikovati kritični put:

a. CPM metodom
b. PDM metodom

Posmatrana aktivnost	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Prethodna aktivnost	-	-	-	A	A	A	B, D	C, G, E	C, G, E	F	I
Trajanje aktivn.(h)	3	7	2	6	12	1	5	2	4	5	4

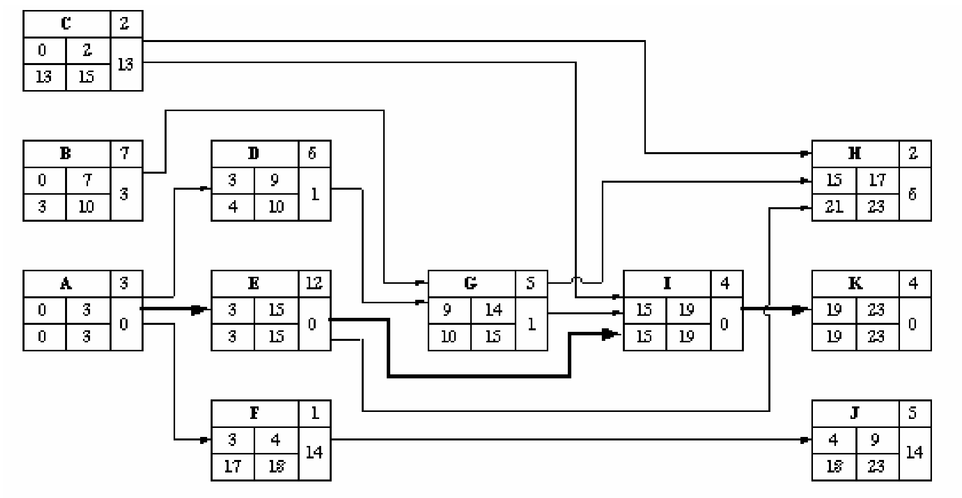
a. CPM mrežni dijagram je prikazan na slici 99.



Slika 99. CPM mrežni dijagram

Projekat se može realizovati za 23 sata. Kritični put se sastoji od sledećih aktivnosti: A-E-I-K.

b. PDM mrežni dijagram je prikazan na slici 100.



Slika 100. PDM mrežni dijagram

Primer 3.

Realizacija projekta instalacije toplovodne mreže je zamišljena prema sledećoj matrici medjuzavisnosti aktivnosti:

	Posmatrana aktivnost							
Prethodna Akt.	A	B	C	D	E	F	G	H
A		FS +2		FS				
B			FF +2					
C					FS			
D						**FS**		
E						**FS**		
F							FF -2	FS
G								
H								
Trajanje aktiv. t_{ij} (dan)	2	4	2	2	2	3	4	2

Ugovoreno je da se sa radom započne u ponedeljak i da se posao završi za 3 radne nedelje. Vikendom (subota i nedelja) se **ne radi**.

Uraditi:

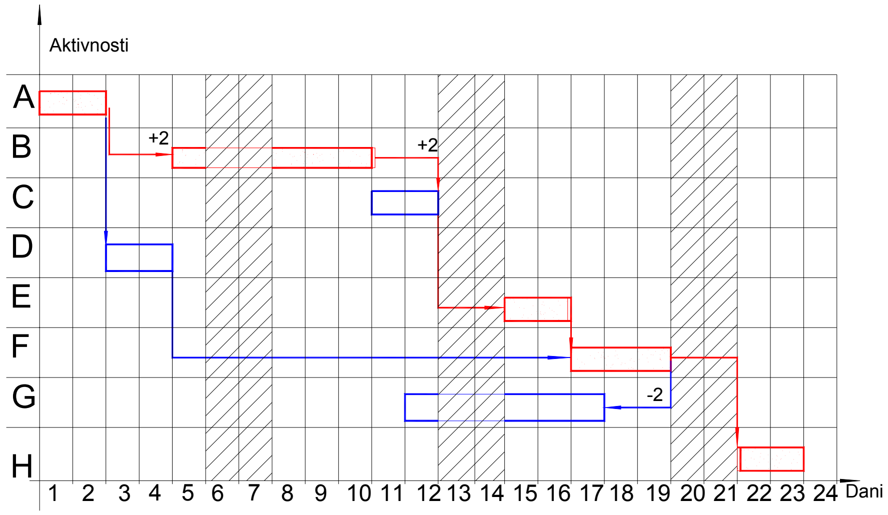
a) Realizaciju projekta prikazati Gantt-ovim dijagramom, odrediti najkraće vreme realizacije projekta i označiti kritični put.

b) Realizaciju projekta prikazati PDM dijagramom i označiti kritični put.

c) Da li je po ovakvom planu moguće projekat realizovanti u ugovorenom roku?

Rešenje:

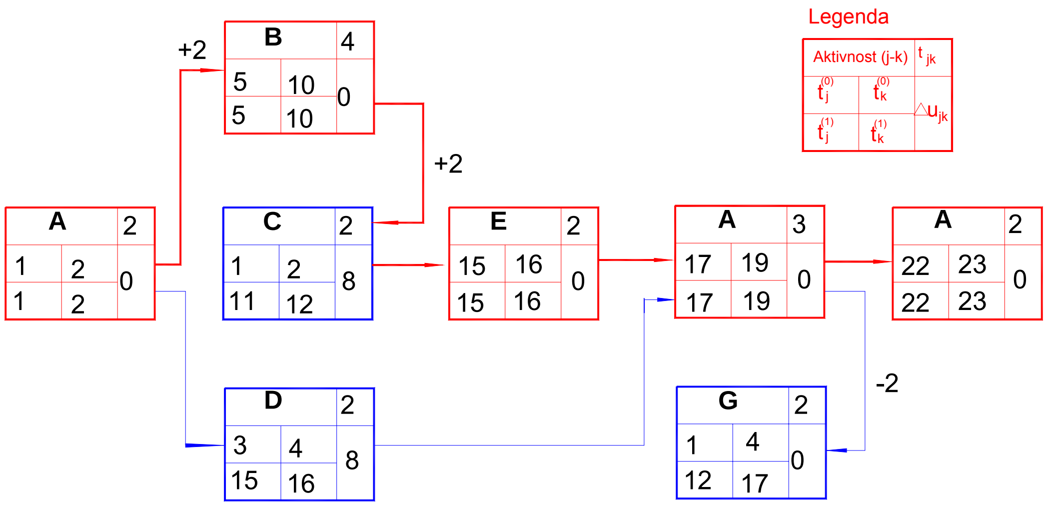
a. Gantt-ov dijagram realizacije projekta je prikazan na slici 101.



Slika 101. Gantt-ov dijagram realizacije projekta

Najkraće vreme realizacije projekta je 23 kalendarska dana, odnosno, 17 radnih dana. Kritični put sačinjavaju aktivnosti A-B-E-F-H.

b. PDM dijagram realizacije projekta je dat na slici 102.



Slika 102. Gantt-ov dijagram realizacije projekta

c. Po ovom planu realizacije projketa, isti nije moguće realizovati u ugovorenom roku od 3 radne nedelje.

8.0. TEORIJA REDOVA ČEKANJA

Ponašanje elemenata složenih produkcionih sistema je najčešće stohastičko, što može dovesti do velikih oscilacija izlaznih parametara. Da bi ovakvi složeni sistemi mogli da rade bez zastoja oni moraju da imaju odgovarajući kapacitet. Svako odstupanje od optimalnog kapaciteta dovodi do neefikasnog iskorišćenja, ili do stvaranja velikih redova čekanja ispred pojedinih čvornih tačaka transportnog sistema.

Da bi se pristupilo analitičkom proučavanju, realni složeni sistem se mora transformisati u model, koji je imitacija stvarnog sistema, a koji verno opisuje ponašanje samog sistema u zadatim okolnostima i zadatom vremenu. Model mora da ispuni sledeće zahteve:

- da predvidi ponašanje sistema u datoj situaciji,
- da se njima eksperimentiše znatno lakše nego sa sistemom.

Složeni sistem se predstavlja kao apstraktna mreža medjusobno povezanih dejstava, transporta materijala, energije i informacija. U produkcionim ili transportnim sistemima, poluproizvodi ili materijal se kreću duž mreže sistema, stim što se u čvornim tačkama to kretanje manje ili više usporava, ili privremeno zaustavlja, odnosno stvaraju se redovi čekanja. Mogući primeri čvornih tačaka su:

- obavljanje tehnoloških operacija, kao što je na primer proces automatskog zavarivanja školjke automobila, obrada delova na nekoj mašini itd.,
- privremeno zaustavnjanje toka materijala, kao što su medjufazna i medjuoperaciona skladišta,
- pretovar materijala, kao što je utovar kamiona, postavljanje kutija na kolica u procesu komisioniranja, unošenje palete u skladište itd.,
- deljenje transportnih tokova, sortiranje tereta i skupljanje više transportnih tokova u jedan,
- promena transportno-tehničkog stanja robe, kao što je paletizacija, depaletizacija, pakovanje, itd.,

Delovi ili materijali se preko pojedinih putanja dovodi do čvorne tačke i odvodi se preko drugih putanja. Ako se posmatra ovaj proces u jednom dužem vremenskom periodu ova količina koja se dovedi u jednu čvornu tačku (Q_i) mora da bude jednaka količini koja se odvodi iz te čvorne tačke (Q_o). U opštem slučaju važi izraz:

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i = \sum_{j=1}^{n} Q_o \qquad (152)$$

Karakteristike jedne čvorne tačke, zavisno od funkcije koju preuzima, definišu: vrsta tehnološke operacije ili materijala koji se transportuje, dimenzije tereta ili delova koji se obradjuju, intenzitet toka i osobine tehnološke opreme ili transportnih sredstava koja učestvuju u datom procesu.

Produkcioni ili transportni ili uopšteno sistemi opsluživanja često rade sa neregularnim uslovima, sa izraženom stohastikim ponašanjem, tako da nije moguće tačno planirati rad po obimu i vremenu. Da bi ovakav sistem mogao da radi bez zastoja, mora da ima odgovarajući kapacitet. Odstupanja od optimalnog kapaciteta dovode do neefektivnog iskorišćenja opreme ili do stvaranja velikih redova čekanja u pojedinim fazama procesa.

Pri dizajniranju produkcionih (opslužnih) sistema osnovni problem je stvaranje redova čekanja na mestima opsluge. Karakteristike ovog problema su sledeće:

1. Dolazak materijala ili delova ili mušterija je slučajan dogadjaj. Za dolazak, odnosno interval vremena izmedju dolaska egzistira verovatnoća, koja se može iskazati sa odredjenom sigurnošću, odnosno sa odredjenom verovatnoćom.
2. Proces opsluživanja dešava se u jednom vremenskom intervalu, koji sledi zadatu statističku raspodelu.
3. Mora da se difiniše mehanizam opsluživanja.
4. Sistem je označen sa jednim od dva stanja: nastaju redovi čekanja, ili je broj opslužnih mesta (broj ljudi, mašina, transportnih uredjaja) veliki, tako da su nedovoljno uposleni.

Matematički modeli redova čekanja daju nam uvid šta se dešava u složenim sistemima opsluživanja. Pažnja se usmerava na izračunavanje verovatnoće da će se sistem opsluživanja naći u specifičnom stanju u ma koje slučajno izabrano vreme. Poznavanje takvog stanja vodi direktno ka parametrima koji su interesantni, kao prosečan broj transportnih jedinica koje čekaju, prosečno vreme čekanja, itd. Modeli redova čekanja nisu mnogo korisni za rešavanje praktičnih problema velike složenosti, ali oni omogućavaju stvaranje osnovnog koncepta, kao polaznog rešenja kod procesa simulacije.

Modeli redova čekanja detaljno su obradjeni u stranoj i domaćoj literaturi (Kendall, 1953.; Newell, 1971.; Kleinrock, 1976.; Tacha 1976.; Cooper, 1981.; Vukadinović, 1975.; Zrnić, 1987., 1993., 1994.; Kosanić, 1999.). Modeliranje složenih fleksibilnih transportnih sistema u metalopreradjivačkoj industriji korišćenjem teorije redova čekanja detaljno je dato u radu autora (Jovanović, 1990.), u kome su napisani i dati računarski programi za jednokanalne i višekanalne sisteme opsluge.

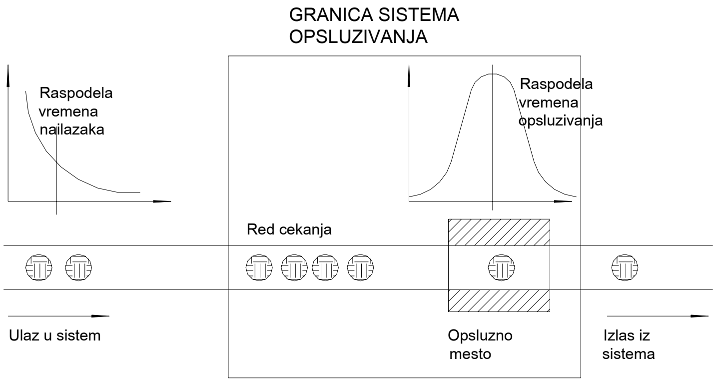
Pri modeliranju sistema opsluživanja teorijom redova čekanja mora se raspolagati bazom podataka o stohastičkom ponašanju elementarnih podsistema. Najvažniji podaci se odnose na poznavanje funkcija raspodele vremena pojedinih radnih ciklusa, ili pojedinih operacija iz radnih ciklusa.

8.1. Osnovni pojmovi i definicije

U daljem tekstu biće korišćeni sledeći termini i oznake :

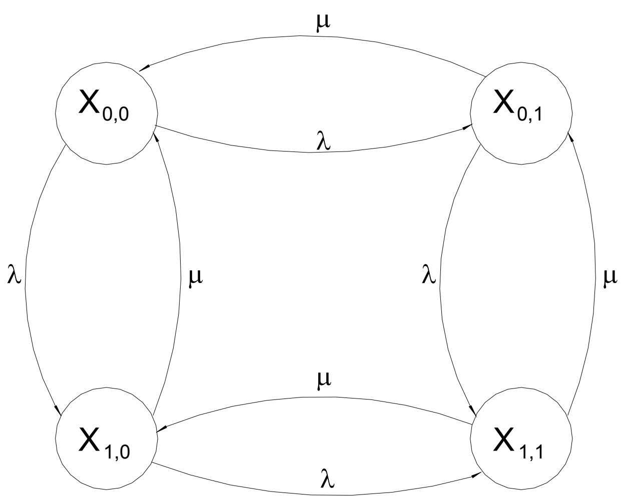
- stanje sistema odredjuju promenljive tog sistema, pa je stanje sistema poznato ako su poznate promenljive sistema,
- tranzicija stanja je prelaz sistema iz jednog stanja u drugo u toku vremena, pri čemu se prelaz može odvijati kontinualno, ili u tačno odredjenim trenucima vremena,
- proces nailazaka jedinica u sistem je slučajna promenljiva i definisan je intenzitetom nailaska λ (jed/min) i fukcijom raspodele parametra koji ga odredjuje,
- proces opsluživanja je takodje slučajna veličina koja je definisana intenzitetom opsluge μ (jed/min) i fukcijom raspodele parametra koji je odredjuje.

Grafička predstava jednog sistema opsluživanja je data na slici 103.



Slika 103. Sistem opsluživanja

Različita stanja sistema ili različite realizacije odgovarajućeg procesa mogu se izraziti ili ilustrovati pomoću grafa stanja, kao što je dato na slici 104.



Slika 104. Graf stanja sistema

Jedno od značenja grafa sa slike 104 može biti da predstavlja benzinsku stanicu na kojoj rade dva prodavca. Tada sistem opsluživanja može da se u proizvolnom trenutku vremena nadje u jednom od sledećih stanja:

$X_{0,0}$ – oba prodavca (oba opslužna mesta) su slobodna,

$X_{1,0}$ – prvi prodavac je zauzet a drugi slobodan,

$X_{0,1}$ – prvi prodavac je slobodan, a drugi je zauzet,

$X_{1,1}$ – oba prodavca su zauzeta.

8.2. Slučajni procesi nailazaka i opsluživanja

Ovde će biti razmotrene sledeće raspodele parametara stohastičkih procesa:

- Puasonova (Poisson) raspodela,
- Erlangova (Erlang) rapodela,
- normalna raspodela

8.2.1. Puasonova raspodela

Puasonova rapodela, ili potok dogadjaja su značajni naročito za modeliranje procesa nailazaka jedinica u sistem. Puasonov potok dogadjaja ima sledeće osbine:

- ordinarnost, što znači da klijenti, odnosno jedinice dolaze u sistem pojedinačno, i
- odsustvo posledica, što znači da broj dogadjaja X_1 koji padaju u vremenski period t_1 ne zavisi od broja dogadjaja X_2 koji padaju u interval t_2.

U kursevima matematike – teorija verovatnoće dokazuje se da je broj dogadjaja X koji padaju na proizvoljan interval vremena τ ima Puasonovu raspodelu:

$$P_{t,\tau}(X = m) = \frac{[a(t,\tau)]^m}{m!} \bullet e^{-a(t,\tau)} \qquad (153)$$

gde je $a(t,\tau)$ srednji broj dogadjaja za vreme τ, koji je kod ordinarnog potoka dogadjaja jednak intenzitetu $\lambda(t)$. Ako intenzitet potoka dogadjaja ne zavisi od vremena, radi se o prostom potoku dogadjaja, koji ima posebno značaj u teoriji masovnog opsluživanja. Zbog uslova stacionarnosti, srednji broj dogadjaja koji se pojavljuju u intervalu vremena $(t, t+\tau)$ ne zavise od trenutka t, već samo od dužine intervala τ, pa je:

$$a(t,\tau) = a(\tau) = \int_{t}^{t+\tau} \lambda \bullet dt = \lambda \bullet \tau \qquad (154)$$

Verovatnoća, da će se u proizvoljno izabranom intervalu vremena dužine τ pojaviti m dogadjaja je:

$$P_\tau(X=m)=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau} \quad (155)$$

Verovatnoća da se na posmatranom intervalu ne pojavi ni jedan dogadjaj je:

$$P_\tau(X=0)=e^{-\lambda\tau} \quad (156)$$

Osnovna karakteristika prostog potoka je zakon (funkcija) raspodele intervala vremena T izmedju pojavljivanja susednih dogadjaja, recimo pojavljivanje mušterija, klijenata, jedinica koje treba obraditi i slično.

$$\begin{aligned} &F(t)=P(T<t) \\ &P(T\geq t)=1-F(t)=e^{-\lambda t} \\ &F(t)=1-e^{-\lambda t} \end{aligned} \quad (157)$$

Gustina raspodele se dobija diferenciranjem funkcije raspodele:

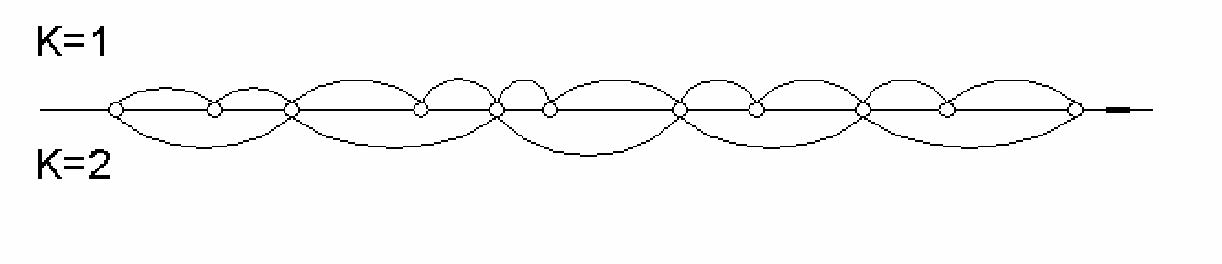
$$f(t)=F^{'}=\lambda e^{-\lambda\tau} \quad (158)$$

Kao što se iz gornjeg vidi, u prostom Puasonovom potoku sa intezitetom nailazaka jedinica λ, interval izmedju proizvoljna dva susedna dogadjaja je karakterisan eksponencijalnom raspodelaom sa parametrom λ.

Još jedna važna osobina prostih potoka dogadjaja je i mogućnost njihovog sabiranja, odnosno formiranje sumarnog potoka. Pretpostavka je da su potoci približno jednaki, odnosno da imaju gustine istog reda. Sumarni potok dogadjaja je takodje Puasonom potok, pri čemu se intenzitet nailazaka sumira. U praksi je pokazano da je dovoljno imati 4-5 potoka dogadjaja, da bi se dobio potok sa kojim se može operisati kao sa prostim potokom.

8.2.2. Erlangova raspodela

Erlangova raspodela, ili Erlangov potok dogadjaja nastaje „ prosejavanjem” prostog potoka, kao što je prikazano na slici 105 gde je zadržana svaka druga tačka i dobijen potok dogadjaja drugog reda.



Slika 105. Erlangovi potoci dogadjaja

Funkcija gustine Erlangove raspodele k-tog reda je:

$$f(t) = \frac{1}{(k-1)!}\lambda^k \bullet t^{k-1} \bullet e^{-\lambda x},..x > 0, k > 0, \lambda > 0 \qquad (159)$$

Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive je:

$$M = \frac{k}{\lambda}$$
$$\delta^2 = \frac{k}{\lambda^2} \qquad (160)$$

Izgled gustine funkcije Erlangove raspodele (k=6 i k=5) je dat na slici 106. Primer je uzet iz studije o ponašanju čvornih tačaka složenog sistema transporta i izvoza rude pri podzemnoj eksploataciji.

Erlangova raspodela je veoma fleksibilna i pogodna za modeliranje sistema opsluživanja. Parametar k, stepen slobode Erlangove raspodele može imati vrednosti k= 1 - ∝. Specijalan slučaj je k=1, kada je to zapravo eksponencijalna raspodela. Kada je k= ∝, nema stohastike i dogadjaji imaju deterministički vrednost. Erlanova raspodela stepena oko 30 dobro aproksimira normalnu raspodelu, kao što je prikazano na slici 107.

Karakteristike statističkog uzorka	
Obim uzorka:	N=150
MIN član:	X_{min}=2.87 min.
MAX član:	X_{max}=5.57 min
Matemat. očekivanje:	M(X)=1.148 min.
Disperzija:	D(X)=0.6064
Srednje kvad. odstup.:	σ=0.815
Broj intervala:	k=10
Dužina intervala:	h=0.3 min

Rezultati testiranja hipoteze

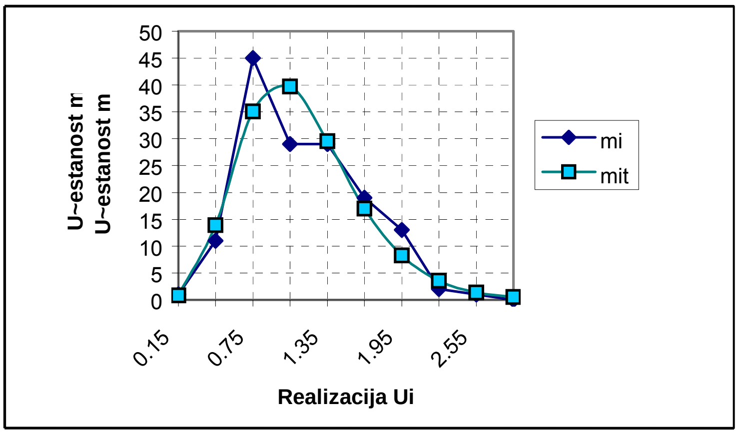
χ^2=10.59

χ^2_{kr}=15.5 za ν=8 i α=0.05

Prihvaćena hipoteza:

ERLANGOVA RASPODELA

k=6 i λ=5.2265



a) Otkopni transport – statistički uzorak I

Karakteristike statističkog uzorka	
Obim uzorka:	N=80
MIN član:	X_{min}=2.75 min.
MAX član:	X_{max}=6 min
Matemat. očekivanje:	M(X)=1.365 min.
Disperzija:	D(X)=1.108
Srednje kvad. odstup.:	σ=1.053
Broj intervala:	k=10
Dužina intervala:	h=0.325 min

Rezultati testiranja hipoteze

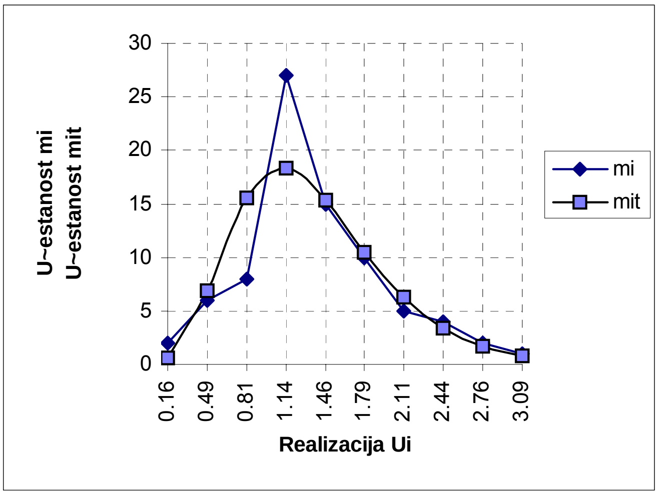
χ^2=11.68

χ^2_{kr}=15.5 za ν=8 i α=0.05

Prihvaćena hipoteza:

ERLANGOVA RASPODELA

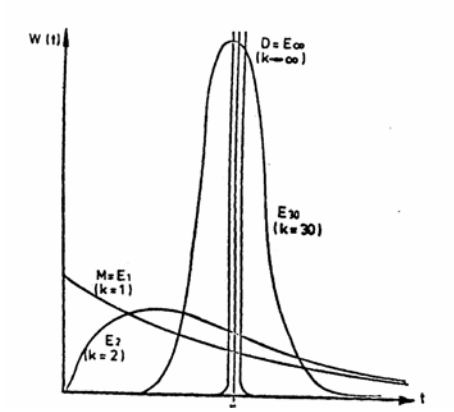
k=5 i λ=3.663



b) Otkopni transport – statistički uzorak II

Slika 106. Izgled gustine Erlangove raspodele

Sa Erlangovom raspodelom nižih stepena slobode (k=1, 2, 3 . .) dobro se mogu opisati procesi gde je dominantan uticaj ljudskog faktora, a veće vrednosti k (na primer k=30) odgovaraju procesima gde je očit uticaj automatizovanih uredjaja.



Slika 107. Izgled funkcije gustine Erlang-ove raspodele

8.2.3. Normalna raspodela

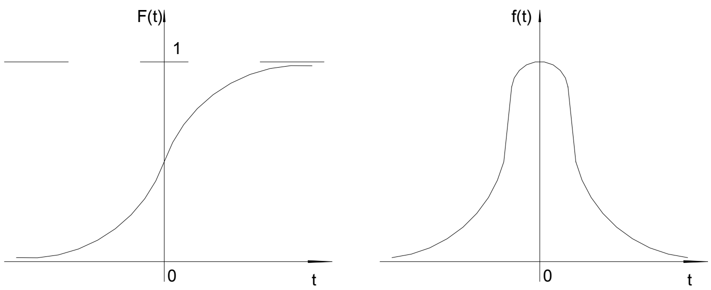
Funkcija normalne raspodele i funkcija raspodele su:

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dt\ ,\quad f(t)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\delta^2}(x-M)^2} \qquad (161)$$

Često se koristi standardizovana normalna raspodela sa M=0 i δ^2=1 u obliku:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (162)$$

Izgled standardizovane funkcije normalne raspodele i funkcija njene gustine date su na slici 108.



Slika 108. Izgled standardizovane normalne raspodele

Normalna raspodela se uspešno može primeniti pri modeliranju prirodnih i društvenih procesa.

8.3. Jednodimenzionalni modeli redova čekanja

Jednodimenzionalni modeli redova čekanja daju dosta uprošćenu sliku ponašanja transportnog sistema, tako da se mogu koristiti u fazi pretprojektnih studija, kao i za dobijanje početnog, inicijalnog rešenja za dalju razradu i optimizaciju. Modeliranje sistema unutrašnjeg transporta metodama redova čekanja je detaljno obradjivao Zrnić (Zrnić i Savić, 1987.; Zrnić, 1993.; Zrnić i Petrović, 1994.; Zrnić, 1996b.; Zrnić, 1997.) i drugi. Za modeliranje diskontinualnih sistema transporta i izvoza rude interesantni su neki od višekanalnih modela redova čekanja. Oznake su po Kandall-u i Lee-u, i date su kao (x/y/z): (u/v/w), gde je:

x: raspodela vremena ulazaka u sistem,

y: raspodela vremena opsluge,

z: broj kanala opsluge,

u: disciplina opsluge,

v: broj mesta u sistemu,

w: ukupan broj u populaciji.

Kendal je predložio simbole za klasifikaciju redova čekanja koji se uglavnom primenjuju svuda u literaturi:

M – označava raspodelu vremena izmedju dolaska ili vremena opsluživanja sa negativnom eksponencijalnom distribucijom,

G - označava raspodelu vremena opsluživanja opšteg tipa (u radu se uzima ista oznaka i za raspodelu vremena ulaznog procesa opšteg tipa),

D – označava vremena izmedju dolazaka ili vremena opsluživanja koja su konstantna, i

C – označava broj kanala u sistemu.

Za Erlangov proces see uzima oznaka E_k (k = 1 , 2 , . . .).

Sistem čekanja se karakteriše sledećim izrazom: ulazni proces / proces opsluživanja/ broj kanala. Tako na primer izraz M/D/5 (E_1 / E ∞ / 5) , označava sistem opsluživanja u kome je dolazakopisan Poisson-ovim procesom, vreme opsluživanja je konstantno i ima pet kanala.

Najčešće korišćenih jednodimenzionalnih modela redova čekanja su:

Modeli Poisson-a:

(M/M/C):(FCFS/N/∞)

(M/M/C):(FCFS/∞/∞)

(M/M/C):(GD/N/∞)

(M/M/C):(GD/∞/∞)

(M/M/C):(PRI/∞/∞)

(M/M/C):(GD/K/K)

($M^{(B)}$/M/C):(GDFS/∞/∞)

(M/$M^{(b)}$/C):(GDFS/∞/∞)

(M/M/1):(FCFS/∞/∞)

(M/M/1):(GD/N/∞)

(M/M/1):(GD/∞/∞)

(M/M/C):(HELPF/N/∞)

(M/M/C):(HELPF/∞/∞)

(M/M/C):(HELPS/N/∞)

(M/M/C):(HELPS/∞/∞)

Non-Poisson modeli:

(M/G/1):(GD/∞/∞)

(M/E_k/1):(GD/∞/∞)

(M/G/1):(PRI/∞/∞)

(GI/M/1):(GD/∞/∞)

(E_k /M/1):(GD/∞/∞)

(D/M/1):(GD/∞/∞)

Specifični non-Poisson modeli

(M/E_2/2):(GD/2/∞)

(M/HE_2/1):(GD/∞/∞)

(M/HE_2/2):(GD/2/∞)

(E_2/ME/1):(GD/N/∞)

(E_2/M/2):(GD/N/∞)

(HE_2 /M/1):(GD/N/∞)

(HE_2 /M/2):(GD/N/∞)

(HE_2 / E_2/1):(GD/1/∞)

Elementarni (jednokanalni) sistem opsluživanja sa naznačenim granicama sistema je dat na slici 26, koga karakterišu sledeći elementi: izvor, ulazni proces, mehanizam opsluživanja, disciplina reda čekanja i konfiguracija sistema čekanja.

Izvor je mesto iz koga potiču jedinice (klijenti, delovi za obradu, materijal za transport) koje zahtevaju opsluživanje. Ukupni broj potencijalnih jedinica koje zahtevaju opsluživanje može da bude konačan ili beskonačan, tako da je izvor konačan ili beskonačan. U svim stvarnim problemima izvor je konačan, a ukoliko je populacija dovoljno velika, onda se iz praktičnih razloga može uzeti da je izvor beskonačan, što je veoma korisno, pošto je analiza modela sa beskonačnim izvorom bitno lakša nego kod modela sa konačnim izvorom.

Ulazni proces se karakteriše vremenom izmedju dolazaka jedinica iz izvora (t_{di}). Ovo vreme se posmatra kao nezavisna i identično distribuirana slučajna promenljiva. Uobičajen oblik ovog procesa koji se upotrebljava u modelima redova čekanja je

Puasonov proces. Prosečan iznos (intenzitet) dolazaka jedinica je $\lambda = 1 / t_d$, gde je t_d – prosečno vreme izmedju dolazaka.

Mehanizam opsluživanja je definisan sa tri nezavisne promenljive, i to:

1. Vreme opsluživanja, koje je u opštem slučaju promenljiva slučajna veličina (t_{si}) . Može se uzeti da vreme opsluživanja formira jedan niz od nezavisnih i identično rasporedjenih slučajnih promenljivih. Takodje se uzima da su vremena izmedju dolazaka i vremena opsluživanja uzajamno nezavisna.
2. Kapacitet opsluživanja se obično daje kao broj jedinica koje mogu jednovremeno da se opsluže, pa sistemi mogu da budu jednokanalni i višekanalni.
3. Uredjaj za opsluživanje, koji može da bude na raspolaganju u izvesno vreme, ali ne i u drugo (radi na drugom poslu, poslužilac obavlja pomoćne dužnosti).

Disciplina u redu čekanja je kriterijum po kome se vrši selekcija jedinica za opsluživanje onda kada su već u redu, pri čemu se razlikuju dva slučaja: jedinstveni red čekanja (moguć u svim slučajevima, nezavisno od broja kanala) i više paralelnih redova čekanja (samo kod višekanalnih sistema).

Iz jedinstvenog reda čekanja jedinice na opslužna mesta prelaze po nekoj od sledećih disciplina:

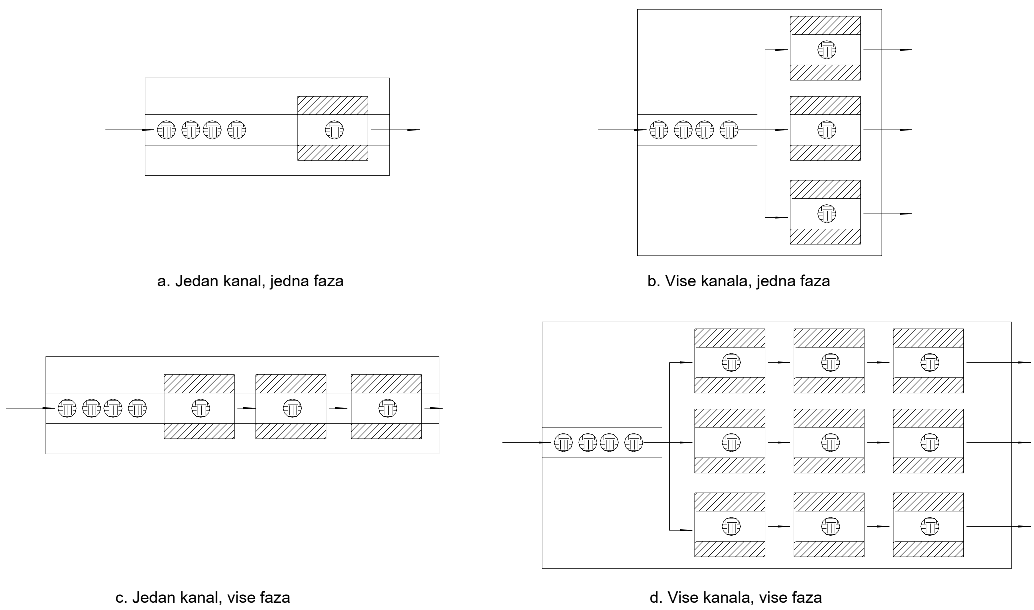
- FIFO – (First In – First Out; prva koja dodje - prva se opslužuje) ,
- LIFO - (Last In – First Out; poslednja koja dodje – prva se opslužuje),
- slučajna disciplina - redosled opsluživanja odredjuje se na slučajan način izmedju svih prisutnih jedinica,
- disciplina prema prioritetu, koji može da bude odredjen prema najkraćem ili najdužem vremenu opsluživanja, tipu jedinice, odnosno klijenta itd. Kod pojave jedinica sa višim prioritetom mogu da nastupe dva slučaja:
  a) produžava se već započeti proces opsluživanja i po njegovom završetku bira se jedinica sa najvišim prioritetom,
  b) prekida se započeti proces opsluživanja, jedinica sa mesta opsluživanja se vraća u red čekanja, a prihvata se prioritetna jedinica.

Dva značajna fenomena mogu da budu prisutna u sistemima redova čekanja :

- jedinica se ne priključuje redu koji ima dužinu veću od neke odredjene (zadate), i
- jedinica napušta red, pošto mu se prethodno priključila i čekala izvesno vreme.

<u>Konfiguracija sistema za opsluživanje</u> može da bude sledeća (slika 109):

- jedan kanal i jedna faza opsluživanja,
- više kanala i jedna faza opsluživanja,
- jedan kanal i više faza opsluživanja (serijski jednokanalni sistem),
- više kanala i više faza opsluživanja (serijski višekanalni sistem), i
- složeni sistem opsluživanja, koji predstavlja kombinaciju prva četiri navedena sistema.



Slika 109. Konfiguracija sistema za opsluživanje

Zavisno od <u>raspoloživog prostora za čekanje jedinica</u> može da se izvrši podela na :

- sisteme sa prostorom za čekanje neograničenog kapaciteta, i
- sisteme sa prostorom za čekanje ograničenog kapaciteta.

8.3.1. Osnovne karakteristike i izlazni parametri sistema za opsluživanje

Kod studiranja fenomena čekanja u stohastičkim procesima, analize mogu da se vrše za procese koji zavise od vremena, ili mnogo jednostavnije, za proces sa stacionarnim stanjem, usvajajući njegovo postojanje. U ovom poglavlju će se prvenstveno razmatrati karakteristike stacionarnog stanja u problemu redova čekanja.

Ukupan broj jedinica u sistemu za opsluživanje predstavlja stanje sistema. Uopšte je interesantno prosečno ponašanje sistema i odatle se ne interesujemo za stanje sistema u funkciji vremena. Pažnja se usmerava na izračunavanje verovatnoće da će se sistem naći u specifičnom stanju u ma koje slučajno izabrano vreme. Poznavanje takvog stanja vodi direktno ka parametrima koji su interesantni.

Statističko ponašanje sistema opsluživanja se karakteriše uglavnom sledećim parametrima:

- broj jedinica u sistemu, uključujući i onu koja se opslužuje u datom momentu vremena i iznos N (t),
- broj jedinica u sistemu koje čekaju na opsluživanje u datom momentu je N_w (t),
- vreme opsluživanja t_S ,
- vreme zadržavanja jedinice u sistemu (proteklo vreme od trenutka kada se jedinica priključi redu do trenutka napuštanja sistema posle završenog opsluživanja) t_{wS} , i
- vreme čekanja jedinice na opsluživanje t_w .

Prosečan broj jedinica u sistemu opsluživanja N je odredjen sa tri faktora:

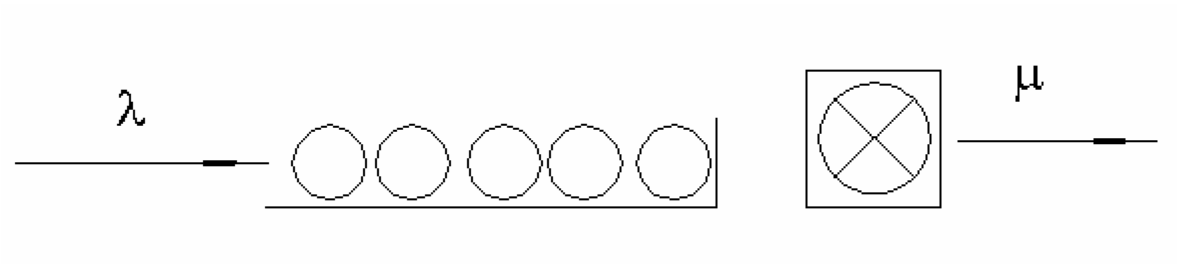
- raspodelom verovatnoće vremena dolaska jedinica,
- raspodelom verovatnoće vremena opsluživanja, i
- koeficijentom opterećenja sistema

8.3.2. Model čekanja M/M/1

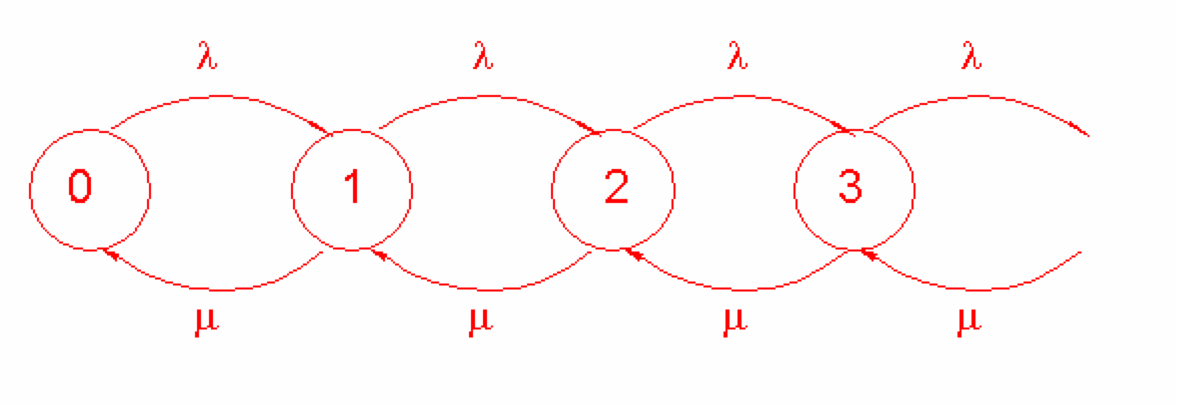
Kod ovog modela dolasci (vremena izmedju dolazaka) se pokoravaju negativnoj eksponencijalnoj raspodeli. Vreme opsluživanja se takodje pokorava negativnoj eksponencijalnoj raspodeli. Ova pretpostavka se za svaki konkretni slučaj treba utvditi uzorkovanjem i statističkom obradom. Sistem je potpuno odredjen poznavanjem intenziteta dolazaka λ i intenzitetom opsluživanja μ.

Dolasci se realizuju jedan po jedan, što ima za posledicu povećanje broja jedinica u sistemu za 1, dok se opsluga takodje realizuje na samo jednoj jedinici, što ima uticaj na smanjenje broja jedinica u sistemu za po jedan. Ovakav proces se naziva i proces radjanja i umiranja.

Šematski prikaz ovakvog sistema je dat na slici 110, dok je njegov tranzitivni dijagram dat na slici 111.



Slika 110. Šematski prikaz sistema M/M/1



Slika 111. Tranzitivni dijagram sistema M/M/1

Pošto se ponašanje sistema posmatra u dužem vremenskom periodu, rezultati stacionarnog stanja su dovoljni za interpretaciju ponašanja sistema, tako da je:

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \bullet \Lambda \Rightarrow 0 = P \bullet \Lambda \tag{163}$$

pri čemu je $[\pi_0, \pi_1, \pi_2 ....] = P$ vektor vrsta verovatnoća stacionarnih stanja, a Λ matrica tranzitivnih intenziteta.

Na osnovu jednačine 99 slede jednačine stacionanih stanja:

$$\begin{aligned} P_0^{'} &= 0 = -\lambda \bullet \pi_0 + \mu \bullet \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \rho \bullet \pi_0 \\ P_1^{'} &= 0 = \lambda \bullet \pi_0 - (\lambda + \mu) \bullet \pi_1 + \mu \bullet \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \rho^2 \bullet \pi_0 \\ P_j^{'} &= 0 = \lambda \bullet \pi_{j-1} - (\lambda + \mu) \bullet \pi_j + \mu \bullet \pi_{j+1} \Rightarrow \pi_2 = \rho^j \bullet \pi_0 \end{aligned} \tag{164}$$

Matrica tranzitivnih intenziteta je data kao:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & & . & \end{bmatrix} \tag{165}$$

Vrednost za verovatnoću stacionarnog stanja se dobija iz normalizovane jednačine

$$\sum \pi_j = 1 \tag{166}$$

Posle matematičkog sredjivanja, dobijaju se sledeće vrednosti verovatnoća stacionarnog stanja:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 1 - \rho \\ \pi_1 &= \rho^1 (1 - \rho) \\ &. \\ \pi_j &= \rho^j (1 - \rho) \end{aligned} \tag{167}$$

Srednji broj jedinica u sistemu je:

$$N = \sum_{j} j \bullet \pi_j$$

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (168)$$

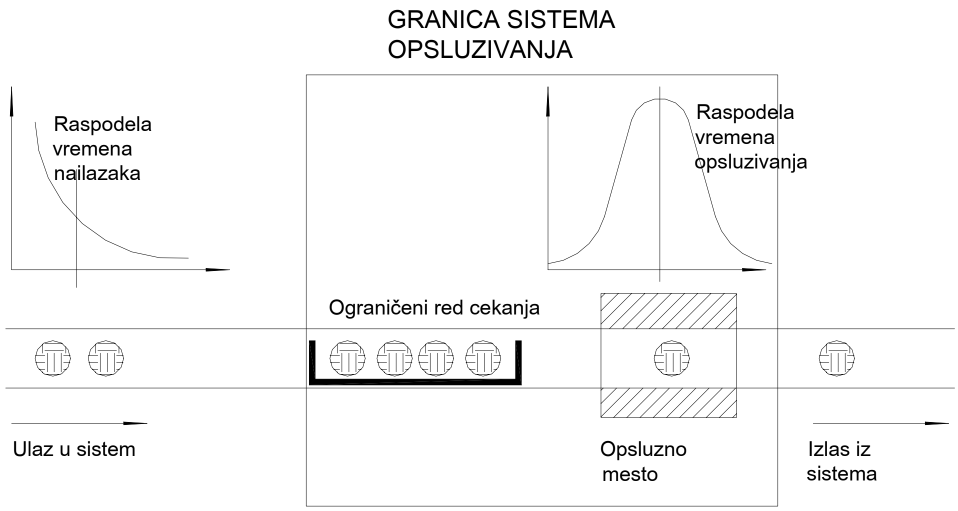
Srednji broj jedinica u redu čekanja je:

$$N_W = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (169)$$

$$N - N_w = \rho$$

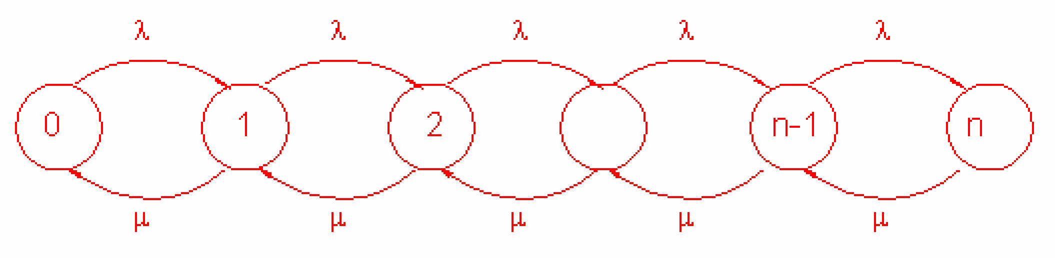
8.3.3. Model sa ograničenim brojem jedinica u sistemu M/M/1/N

Ovaj model se primenjuje kada je prostor za čekanje ograničen, kao što je prikazano na slici 112.



Slika 112. Model sa ograničenim redom čekanja

Prethodni model mora pretrpeti izvesne izmene. Tranzitivni dijagram je dat na slici113.



Slika 113. Tranzitivni dijagram modela sa ograničenim redom čekanja

Matrica tranzitivnih intenziteta je data kao:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ & & & & & \\ & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\ & & & & \mu. & -\mu \end{bmatrix}$$

Raspodela stacionarnih verovatnoća je:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$
$$\pi_j = \rho^j \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad (170)$$
$$\pi_N = \rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

Srednji broj jedinica u sistemu je:

$$N_{WS} = \sum_{j=0}^{N} j \bullet \pi_j = \sum_{j=0}^{N} j \bullet \rho^j \bullet \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad (171)$$

Ako je intenzitet ρ mali, a broj mesta u sistemu (u redu) N veliki, broj jedinica u sistemu je približno: $N_{WS} = \dfrac{\rho}{1-\rho}$

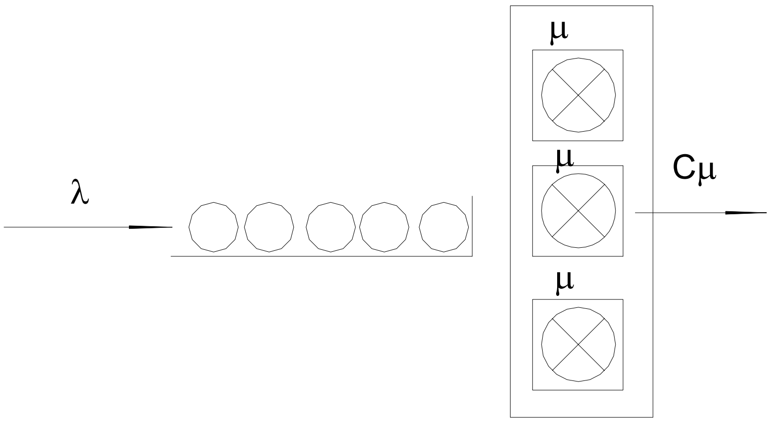
Za male vrednosti N, srednji broj jedinica u sistemu se može i direktno izračunati kao:

$$N_{WS} = 0 \bullet \pi_0 + 1 \bullet \pi_1 + \ldots.. + 5 \bullet \pi_5 ;.za..N = 5 \qquad (172)$$

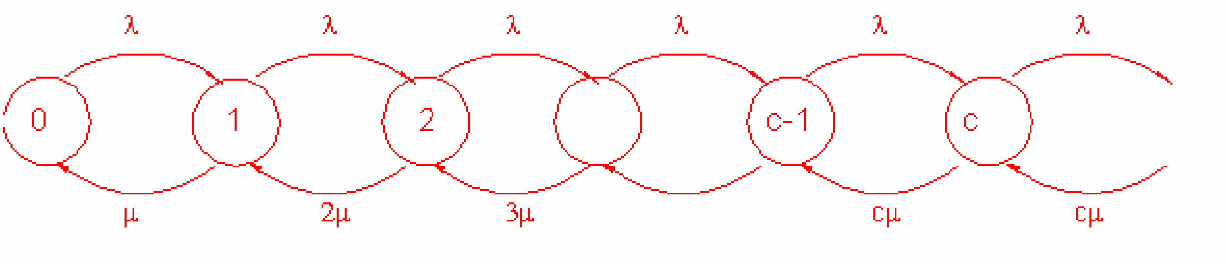
8.4. Višekanalni sistemi opsluživanja

8.4.1. Višekanalni model čekanja M/M/C

Ovakav sistem je šematski prikazan na slici 114, dok je njegov tranzitivni dijagram dat na slici115.



Slika 114. Šematski prikaz sistema M/M/C



Slika 115. Tranzitivni dijagram sistema M/M/C

Sve jednačine izvedene za sistem opsluživanja M/M/1 važe i za sistem M/M/C, uz preračunavanje opterećenja sistema kao:

$$\rho' = \frac{\lambda}{C \bullet \mu} = \frac{\rho}{C} \tag{173}$$

pri čemu je:

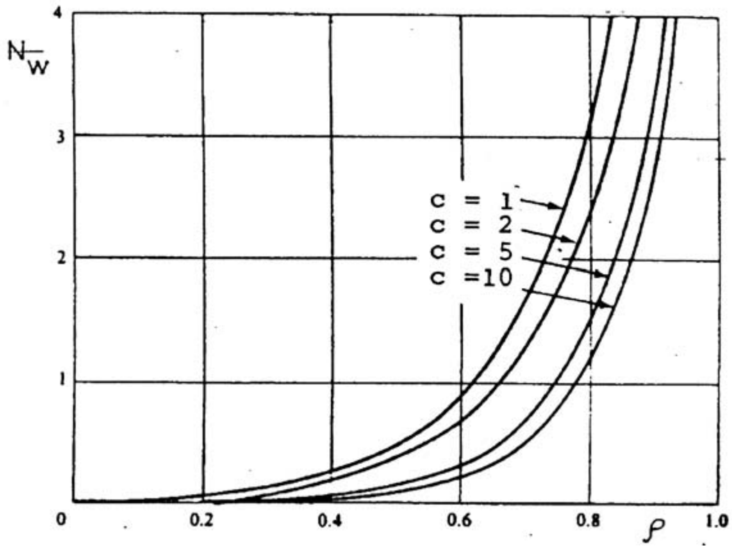
λ- intenzitet nailazaka jedinica u sistem,

μ- intenzitet opsluge na svakom opslužnom mestu, C- broj kanala opsule,

$\rho^{'}$ – ekvivalentno opterećenje sistema.

U literaturi postoje gotovi grafikoni na osnovu kojih se odredjuju parametri u istemu opsluge (broj jedinica u sistemu, broj jedinica u redu čekanja, verovatnoće stanja, vremena i sl.

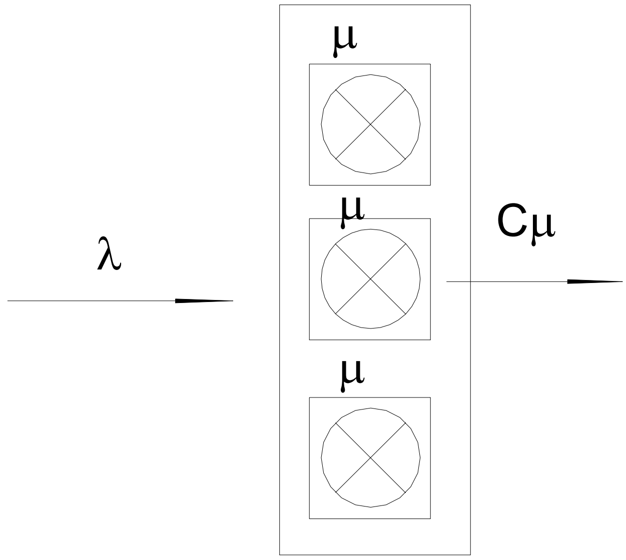
Na slici 116 je dat grafik za odredjivanje broja jedinica u redu čekanja (N_W) u zavisnosti od broja opterećanja opslužnih mesta i njihovog broja (broja kanala).



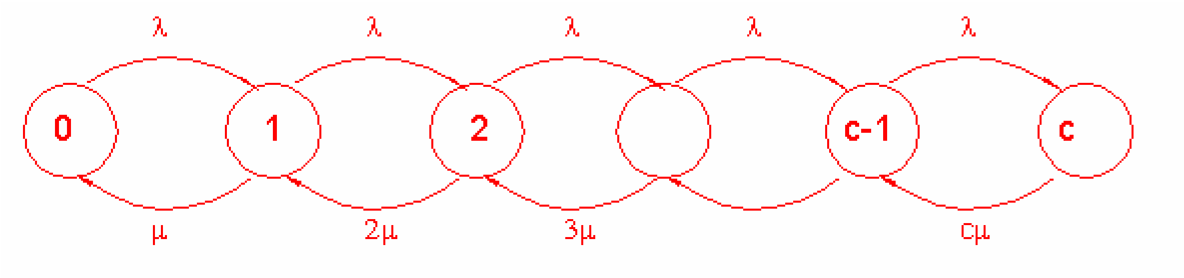
Slika 116. Odredjivanje broja jedinica u redu čekanja na osnovu grafika

8.4.2. Višekanalni model čekanja M/M/C/C

Ovakav sitem opsluživanja je zapravo sistem bez reda čekanja. Jedinice ili ulaze direktno u sistem na opslugu, ili ga napuštaju. Šematski prikaz ovakvog sistema je dat na slici 117, dok je njegov tranzitivni dijagram dat na slici 118.



Slika 117. Šematski prikaz sistema M/M/C/C



Slika 118. Tranzitivni dijagram sistema M/M/C/C

Matrica tranzitivnih intenziteta je data kao:

$$
\Lambda = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & & & \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\
 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \\
 & & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda \\
 & & & &
\end{bmatrix}
$$

Raspodela stacionarnih verovatnoća je:

$$\pi_j = \frac{1}{j!} \bullet \rho^j \bullet \pi_0 = \frac{\rho^j}{j! \bullet \sum_{j=0}^{C} \frac{\rho^j}{j!}}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{c} \frac{\rho^j}{j!}} \qquad (174)$$

U slučaju da je C>>ρ, važe sledeće formule:

$$\pi_0 \approx e^{-\rho}$$

$$\pi_j = \frac{\rho^j}{j!} \bullet e^{-\rho} \qquad (175)$$

Natočito je važno znati verovatnoću da je svih C kanala zauzeto, pošto se u tom slučaju jedinice (transakcije, klijenti, pozivi) gube iz istema. Ova verovatnoća se izračunava po Erlang-ovoj B formuli, koja glasi:

$$\pi_C = \frac{\rho^C}{C! \bullet \sum_{j=0}^{C} \frac{\rho^j}{j!}} \qquad (176)$$

Srednji broj jedinica u sistemu (korisnika koji su uspeli da udju u sistem) je:

$$N_{ws} = \rho \bullet (1 - \pi_C) \qquad (177)$$

8.4.3. Višekanalni model čekanja M/M/C/N

Ovo je slučaj sistema opsluživanja sa mogućnošću formiranja redova čekanja, i to u slučaju kada ce C<N. Jednačine stacionarnog stanja su:

$$
\begin{aligned}
&0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 \\
&0 = -\lambda\pi_{j-1} - (\lambda + j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} ..za.. j = 1,2,3,....C \\
&0 = -\lambda\pi_{j-1} - (\lambda + C\mu)\pi_j + C\mu\pi_{j+1} ..za.. j = C,..C+1..... \\
&0 = \lambda\pi_{N-1} - C\mu\pi_N
\end{aligned}
\qquad (178)
$$

Verovatnoće stacionarnog stanja su:

$$
\pi_j = \begin{cases} (\dfrac{\rho^j}{j!})\pi_0 ..za.. j = 0,1,2...C \\ (\dfrac{\rho^j}{C^{j-C}C!})\pi_0 ..za.. j = C+1,..C+2... \end{cases}
$$

$$
\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (179)
$$

$$
\rho' = \frac{\lambda}{C\mu} = \frac{\rho}{C}
$$

Iz normalizovane jednačine se izračunava verovatnoća stacionarnog stanja:

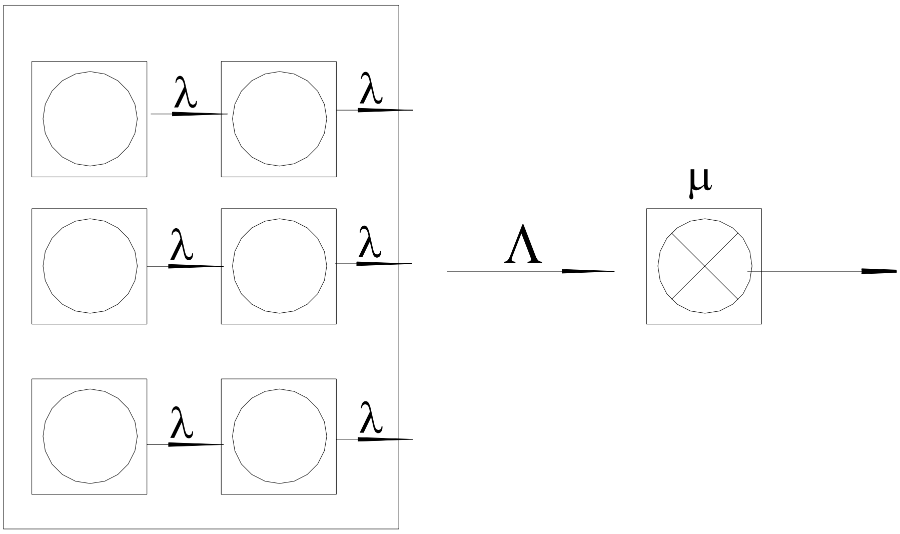
$$
\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{C-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{C\rho^C}{C!(C-\rho)} \right]^{-1} \qquad (180)
$$

U literaturi postoji čitav niz razradjenih dijagrama i programa za proračunavanje veličina jednokanalnih i višekanalnih redova čekanja.

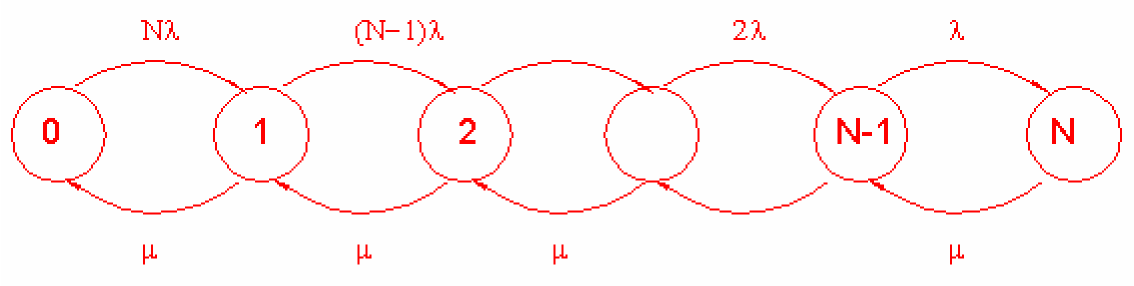
8.4.4. Model čekanja sa ograničenim izvorom M/M/1/N/N

Model čekanja sa ograničenim brojem jedinica u izvoru se može pojaviti u praksi, a kao primeri se mogu navesti: održavanje mašina u nekom pogonu (broj mašina je ograničen), korišćenje kopir mašine u jednom birou, gde je broj korisnika ograničen i slično.

Šematski je ovakav sistem prikazan na slici 119, dok je njegov tranzitivni dijagram dat na slici 120.



Slika 119. Šematski prikaz sistema M/M/1/N/N



Slika 120. Tranzitivni dijagram sistema M/M/1/N/N

Verovatnoće stacionarnih stanja su:

$$\pi_j = \left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{N!}{(N-j)!}\right] \bullet \pi_0$$
$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{N}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{N!}{(N-j)!}\right]^{-1} \qquad (181)$$

Srednji broj jedinica u sistemu je:

$$N_{WS} = 0 \bullet \pi_0 + 1 \bullet \pi_1 + ... + N\pi_N \qquad (182)$$

Srednji broj jedinica u redu čekanja je:

$$N_W = 0 \bullet \pi_0 + 0 \bullet \pi_1 + 1 \bullet \pi_2 ..... + (N-1)\pi_N \qquad (183)$$

8.4.5. Vreme čekanja

Sistem opsluživanja je definisan srednjim brojem jedinica u sistemu i raspodelom verovatnoća pojedinih stanja.

Relacija, koja važi za sve modele redova čekanja je:

$$N = \lambda \bullet t_{WS}$$
$$N_W = \lambda \bullet t_W \qquad (184)$$

U obe relacije λ predstavlja intenzitet ulaska u sistem, ili recipročnu vrednost srednjeg vremena izmedju dva dolaska u sistem. Kada je kapacitet sistema ograničen, kao u modelima M/M/1/N/∞/FIFO ili M/M/C/C/FIFO, neki potencijalni dolasci se ne realizuju, odnosno, jedinice ili klijenti napuštaju sistem neopsluženi. U ovim slučajevima, intenzitet dolazaka λ se mora korigovati. Na primer, za jednokanalni sistem sa ograničenim redom čekanja, stvarni intenzitet nailazaka je:

$$\lambda_S = \lambda \bullet (1-\pi_N) = \lambda \bullet \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \qquad (185)$$

8.5. Analiza jednokanalnih sistema čekanja u produkcionim procesima

Za sistem redova čekanja oblika E_k / E_j / 1 (za k = 1, 2, . . . i j = 1, 2, . . .) , znači opšti sistem čekanja sa ma kojim Erlangovim raspodelama dolaska i opsluživanja jedinica, nije dato analitičko rešenje primenljivo u praksi. Pošto je Erlangova raspodela pogodna za aproksimaciju stvarnih procesa razmatraće se posebni oblici ovog sistema. Treba napomenuti da se normalna raspodela dobro aproksimira Erlangovom raspodelom pri velikim vrednostima parametra K .

Sistem tipa E_1/E_1/1 (M/M/1)

Ovo je praktično najnepovoljniji slučaj koji se javlja u sistemima opsluživanja. Koristi se pri orijentacionom proračunu dužine redova, kada ne postoje podaci o srednjem rasejavanju i kada se ulazni tok ponaša po Poisson-ovom procesu. Postoje potpuna analitička rešenja.

Sistem tipa E_1/E_k/1 (M/E_k/1)

Sa porastom koeficijena K smanjuje prosečna dužina reda čekanja. Ovaj efekat je naročito izražen pri većim vrednostima koeficijenta opterećenja (intenziteta protoka).
Za modeliranje ovakvog sistema se mogu koristiti jednačine Polačeka i Hinčeka, na osnovu kojih se izračunavaju osnovni parametri sistema i to:
Srednji broj jedinica u redu čekanja:

$$N_W = \frac{\rho^2}{2*(1-\rho)} \bullet \left\{ 1 + \left[\frac{\sigma_{tops}}{\bar{t}_{ops}} \right]^2 \right\} \tag{186}$$

Srednji broj jedinica u sistemu opsluge:

$$N_{WS} = \rho + \frac{\rho^2}{2*(1-\rho)} \bullet \left\{ 1 + \left[\frac{\sigma_{tops}}{\bar{t}_{ops}} \right]^2 \right\} \tag{187}$$

Srednje vreme koje jedinica (klijent, transakcija) provede u redu čekanja (t_W) i u sistemu opsuge (t_{WS}) je:

$$t_W = \frac{N_W}{\lambda}$$
$$t_{WS} \frac{N_{WS}}{\lambda} \tag{188}$$

Izraz $\left\{1+\left[\frac{\sigma_{top}}{\bar{t}_{ops}}\right]^2\right\}$ predstavlja rasejavanje, odnosno, meru rasturanja vremena opsluživanja.

U okviru ovog opšteg slučaja se mogu razmatrata ekstremni slučajevi, i to $E_1/E_1/1$ i $E_1/D/1$, odnosno slučajevi u kojima vreme opsluživanja ima najgoru raspodelu (E_1), odnosno raspodelu sa najvećim rasejanjem i determinističku vrednost (bez rasejanja).

Saglasno jednačinama, za neko isto srednje vreme opsluživanja $\bar{t}_{ops}$, broj jedinica u redu čekanja bi bio:

- za sistem $E_1/E_1/1$: $N_W = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

- za sistem $E_1/D/1$: $N_W = \frac{\rho^2}{2 \bullet (1-\rho)}$

Kao što se iz jednačina vidi, za isto srednje vreme opsluge, srednji broj jedinica u redu čekanja je kod sistema $E_1/E_1/1$ je dva puta veći nego kod sistema $E_1/D/1$, što je direktna posledica stohastike prisutne u vremenu opsluživanja kod prvog sistema.

Sistem tipa $E_k / E_1 / 1$ $(E_k / M / 1)$

Odredjivanje prosečnog broja jedinica u sistemu opsluživanja ovog tipa daje sledeći obrazac:

$$N = \frac{\rho}{1 - V(k,\rho)}$$
$$\sum_{i=1}^{K} V^{i/K} = K \bullet \rho,..(0 \le V \le 1) \qquad (189)$$

Ova jednačina nema analitičko rešenje kada je K>2 i u tim slučajevima se mora rešavati numeričkim metodama.

Neki autori navode da je moguće odrediti prosečan broj jedinica u sistemu opsluživanja tipa $E_k / E_1 / 1$ pomoću izraza za rešavanje sistema $E_1 / E_k / 1$ i pri tome je greška oko 15 %.

Sistem tipa $E\infty / E_1 / 1$ (D/M/1)

Za približno odredjivanje prosečnog broja jedinica u sistemu može se koristiti formula za $E_1/E\infty/1$, greška je manja od 2% .

Sistem tipa $E\infty / E\infty / 1$ (D/D/1)

Kod ovog sistema zapravo nema stohastike i rad se odvija u tekovima, kao na primer na automatizovanim linijama za obradu, pakovanje, transport i slično.

Pri rešavanju praktičnih problema, teorija redova čekanja može da se koristi na dva načina:

- pri rekonstrukciji postojećih pogona; snimanjem rada stvarnog sistema, moguće je formirati histograme koji daju relativnu frekvenciju pojedinih vremena. Raspodela dužine radnog ciklusa treba da se aproksimira funkcijom za koju postoji analitičko rešenje.
- pri projektovanju novih postrojenja raspodela vremena izmedju dolazaka i opsluživanja usvajaju se na osnovu iskustva i ranijih istraživanja.

8.6. Primeri rešenih zadataka

Primer 1. Upredjenje jednokanalnog i dvokanalnog sistema opsluživanja

U advokatskoj kancelariji rade dva advokata i dve sekretarice. Snimanjem je utvrdjeno da svaki advokat u proseku napiše 4 pisma (predmeta) dnevno, a da sekretarica utroši 0.2 dana za obradu jednog zahteva advokata (pisanje pisama, predmeta, žalbi, tužbi itd.).

Pod pretpostavkom da se vremena izmedju zahteva prema sekretaricama, kao i vremena opsluge pokoravaju negativnoj eksponencijalnoj raspodeli, metodom redova čekanja odrediti da li svaki advokat treba da ima svoju sekretaricu, ili da obe sekretarice opslužuju oba advokata.

Rešenje:

Sistem će biti modeliran kao jednokanlni (M/M/1) i kao dvokanalni (M/M/2).

Osnovni parametri sistema M/M/1(pri čemu postoje 2 sistema opsluge):

- intenzitet nailazaka zahteva za opslugom: $\lambda = 4.\frac{jed.}{dan}$
- intenzitet opsluge: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = 5.\frac{jed}{dan}$
- opterećenje radnog mesta: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8$
- srednji broj pisama (jedinica, transakcije) u svakom od sistema: $N_{WS} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$

  Ukupan srednji broj nedovršenih pisama u kancelariji (2 sistema M/M/1) je: 8
- srednji broj pisama (jedinica, transakcije) u svakom redu čekanja: $N_W = N_{WS} - \rho = 4 - 0.8 = 3.2$

  Ukupan srednji broj pisama koja čekaju na obradu je: 2*3.2=6.4 komada.

- srednje vreme koje svako pismo provede u sistemu opsluge je:

$$t_{WS} = \frac{N_{WS}}{\lambda} = \frac{4}{4} = 1\_h$$

- srednje vreme koje svako pismo provede u redu čekanja je:

$$t_W = \frac{N_W}{\lambda} = \frac{3.2}{4} = 0.8\_h$$

Osnovni parametri sistema M/M/2 (posmatra se kao jedan sistem, sa zajedničkim redom čekanja):

- intenzitet nailazaka zahteva za opslugom: $\lambda = 2 \bullet 4 = 8.\frac{jed.}{dan}$

- intenzitet opsluge: $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = 5.\frac{jed}{dan}$

- opterećenje radnog mesta: $\rho' = \frac{\lambda}{C \bullet \mu} = \frac{8}{2 \bullet 5} = 0.8$

- srednji broj pisama (jedinica, transakcije) u celom sistemu:

$$N_{WS} = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{0.8}{1-0.8} = 4$$

- srednji broj pisama (jedinica, transakcije) u jedinstvenom redu čekanja:

$$N_W = N_{WS} - \rho' = 4 - 0.8 = 3.2$$

- srednje vreme koje svako pismo provede u sistemu opsluge je:

$$t_{WS} = \frac{N_{WS}}{\lambda} = \frac{4}{8} = 0.5\_h$$

- srednje vreme koje svako pismo provede u jedinstvenom redu čekanja je:

$$t_W = \frac{N_W}{\lambda} = \frac{3.2}{8} = 0.4\_h$$

Očigledno je da model sa jedinstvenim redom čekanja ima predosti, odnosno, upola je manje vreme čekanja, kao i broj pisama u sistemu. Ovo praktično znači da obrada pisama treba da bude jedinstvena, odnosno, da sekretarice treba da obradjuju pisma čim se pojave, bez obzira koji advokat ih je napisao.

Primer 2: Višekanalni sistem opsluge

U video klubu rade 2 izvršioca. Snimanjem je ustanovljeno da u proseku dolazi 30 klijenata na sat, pri čemu su vremena izmedju dolazaka sa veoma izraženom stohastikom. Takodje je utvrdjeno da srednje vreme opsluge (izdavanje VHS/CD/DVD) iznosi 3 minuta, sa veoma izraženom stohastikom.

Odrediti:

a) srednji broj jedinica (klijenata) u sistemu i u redu čekanja;
b) srednje vreme koje klijenti provedu u redu čekanja i u sistemu;
c) ispitati mogućnost da vlasnik video kluba smanji broj zaposlenih.

Rešenje:

Pošto je u razmatranom sistemu veoma izražena stohastika, sitem će biti m odeliran kao M/M/2 sa zajedničkim redom čekanja, pa su njegovi osnovni parametri:

- intenzitet nailazaka klijenatam: $\lambda = 30.\dfrac{klijenata}{h}$
- intenzitet opsluge (po jednom kanalu): $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{ops}} = 20\dfrac{klijenata}{h}$
- opterećenje sistema: $\rho' = \dfrac{\lambda}{C \bullet \mu} = \dfrac{30}{2 \bullet 20} = 0.75$

a)

- srednji broj klijenata u sistemu: $N_{WS} = \dfrac{\rho'}{1-\rho'} = \dfrac{0.75}{1-0.75} = 3$
- srednji broj klijenata u jedinstvenom redu čekanja:

$$N_W = N_{WS} - \rho' = 3 - 0.75 = 2.25$$

b)

- srednje vreme koje klijent provede u sistemu opsluge je:

$$t_{WS}=\frac{N_{WS}}{\lambda}=\frac{3}{30}=0.1\_h=6\_\min$$

- srednje vreme koje klijent provede u jedinstvenom redu čekanja je:

$$t_{W}=\frac{N_{W}}{\lambda}=\frac{2.25}{30}=0.075\_h=4.5\_\min$$

c)

U slučaju da vlasnik video kluba smanji broj radnika, opterećenje sistema opsluge bi bilo: $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{30}{20}=1.5\succ 1$.

Nije moguće smanjiti broj radnika, pošto sistem postaje nestabilan, sa stalnom tendencijom rasta reda čekanja. U ovakvom slučaju bi vlasnik zapravo gubio klijente, koji bi posle nekog vremena provedenog u redu čekanja napuštali sistem.

Primer 3. Modeliranje sistema naplate u samousluzi

Kod projektovanja nove samousluge treba odrediti minimalni broj kasa. Pretpostavka je da se ispred kasa formira jedinstveni red čekanja. Snimanjem u sličnim samouslugama je utvrdjeno da se vremena izmedju dolazaka mušterija, kao i vremena opsluga mušterija pokoravaju negativnoj eksponencijalnoj raspodeli. Srednje vreme izmedju dolazaka mušterija na plaćanje je 1 min, a srednje vreme opsluge je 1.5 min.

Uraditi:

a) Odrediti minimalni broj kasa.

b) Za tako odredjen broj kasa – opslužnih mesta odrediti:

1. verovatnoću da je sistem prazan
2. srednji broj mušterija u redu čekanja
3. srednje vreme koje mućterije provedu u redu čekanja.

Rešenje:

a) Minimalni broj kasa

Broj kasa treba biti takav da je sistem stabilan, odnosno, da je opterećenje sistema $\rho \prec 1$.

- intenzitet nailazaka: $\lambda = \frac{1}{\bar{t}_n} = \frac{1}{1} = 1\_\frac{klijent}{\min} = 60\_\frac{klijenata}{h}$
- intenzitet opsluge:
- $\mu = \frac{1}{\bar{t}_{ops}} = \frac{1}{1.5} = 0.66666\_\frac{klijenata}{\min} = 40\_\frac{klijenata}{h}$

$$\rho = \frac{\lambda}{C \bullet \mu} \prec 1 \Rightarrow \frac{60}{C \bullet 40} \succ 1 \Rightarrow C \succ 1.5 \Rightarrow C = 2$$

Potrebno je instalirati najmanje 2 kase, odnosno, razmatra se M/M/2 sistem.

b) Parametri sistema M/M/2

- opterećenje sistema: $\rho^{'} = \frac{\lambda}{C \bullet \mu} = \frac{60}{2 \bullet 40} = 0.75$
- srednji broj klijenata u redu čekanja: $N_W = \frac{(\rho^{'})^2}{1-\rho^{'}} = \frac{0.75^2}{1-0.75} = 2.25$
- srednje vreme koje klijent provede u redu čekanja:

$$t_{WS} = \frac{N_W}{\lambda} = \frac{2.25}{60} = 0.0375\_h = 2.25\_\min$$

d) Verovatnoća da je sistem prazan:

$$\pi_0 = 1 - \rho^{'} = 1 - 0.75 = 0.25;\_\pi_0 = 25\%$$

Primer 4. Modeliranje sistema sa ograničenim brojem jedinica

U pogonu za izradu delova od presovanog lima rade 4 automatske prese. Svaka presa u proseku zahteva podešavanje na 100 min. Vremena izmedju zahteva se pokoravaju negativnoj eksponencijalnoj raspodeli. Podešavanje vrši jedan VKV radnik, i u proseku mu je potrebno 10 min. da obavi podešavanje jedne prese. Vreme operacije podešavanja se takodje kao slučajna veličina pokorava negativnoj eksponencijalnoj raspodeli.

a) Razmatrani sistem označiti po Kandall-u, nacrtati šematski prikaz sistema i tranzitivni dijagram rada sistema.

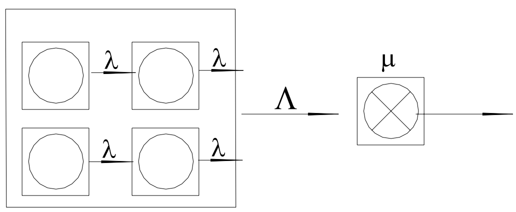
b) Naći verovatnoću da je sistem opsluge prazan i verovatnoću da su sve mašine u procesu održavanja.

c) Odrediti prosečan broj jedinica u sistemu opsluge i u redu čekanja

Rešenje:

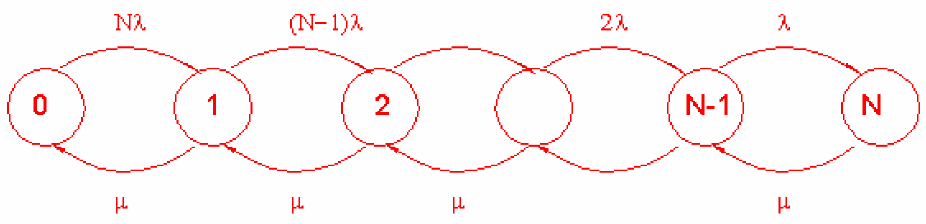
a) Oznaka sistema: M/M/1/4/4.

Šematski prikaz sistema je dat na slici 121.



Slika 121. Šematski prikaz sistema

Tranzitivni dijagram sistema (za N=4) je dat na slici 122.



Slika 122. Tranzitivni dijagram sistema

b). Verovatnoće:

- intenzitet nailazaka: $\lambda = \frac{1}{100} = 0.01\_\frac{ma\sin a}{\min}$
- intenzitet opsluge:
- $\mu == \frac{1}{10} = 0.1\_\frac{ma\sin a}{\min}$

$$\pi_j = \left[(\frac{\lambda}{\mu})^j \bullet \frac{N!}{(N-j)!} \right] \bullet \pi_0 ; \sum_{j=0}^{4} \pi_j = 1$$

j	$(\frac{\lambda}{\mu})^j$	$\frac{4!}{(4-j)!}$	π_j
0	1	1	$\pi_0 = \pi_0$
1	0.1	4	$\pi_1 = 0.4\pi_0$
2	0.01	12	$\pi_2 = 0.12\pi_0$
3	0.001	24	$\pi_3 = 0.024\pi_0$
4	0.0001	24	$\pi_4 = 0.0024\pi_0$

$\pi_0 = 0.64;\_\pi_0 = 64\%;..\pi_1 = 0{,}256;..\pi_2 = 0{,}0768;..\pi_3 = 0{,}01536;$
$\pi_4 = 0.0015;\_\pi_4 = 0.15\%$

c). Srednji broj jedinica u sistemu je:

$$N_{WS} = 0 \bullet \pi_0 + 1 \bullet \pi_1 + 2 \bullet \pi_2 + 3 \bullet \pi_3 + 4 \bullet \pi_4 = 0{,}46168$$

Srednji broj jedinica u redu čekanja je:

$$N_W = 0 \bullet \pi_0 + 0 \bullet \pi_1 + 1 \bullet \pi_2 + 2 \bullet \pi_3 + 3 \bullet \pi_4 = 0{,}11202$$

8.7. Višedimenzionalni modeli redova čekanja

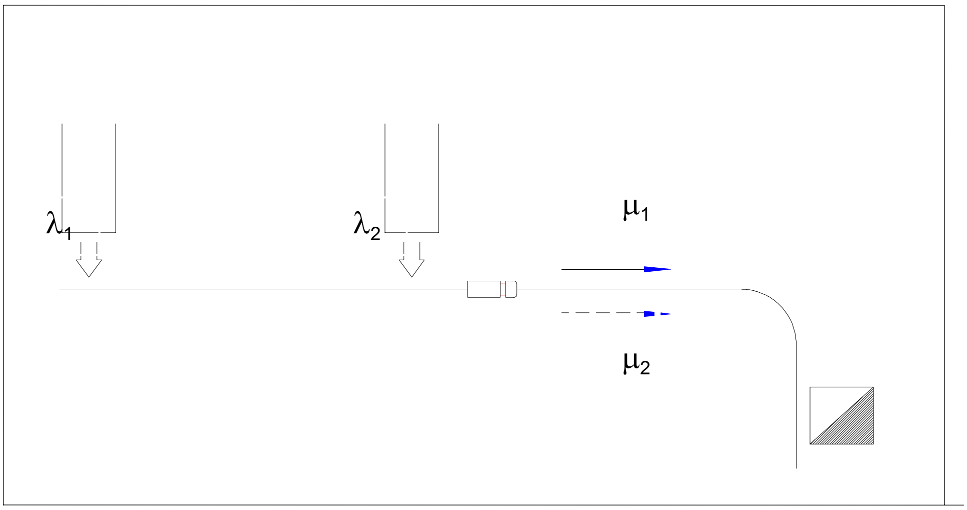
U realnim uslovima transporni sistem može prihvatiti transakcije sa različitim vremenima opsluge, odnosno sa različitom dužinom transporta, pri čemu i intenzitet nailaska transakcija može biti različit.

Višedimenzionalni modeli redova čekanja su po svojoj strukturi složeniji, nije moguće opšte rešenje problema, odnosno svaki konkretni problem zahteva konkretno modeliranje i rešavanje, ali su u svakom slučaju bliži realnim uslovima. U ovom radu su višedimenzionalni modeli iz literature (Kleinrock,1976; Cooper, 1981.) prilagodjeni modeliranju sistema transporta i izvoza pri podzemnoj eksploataciji.

8.7.1 Jednokanalni sistem opsluživanja sa dva tipa transakcija

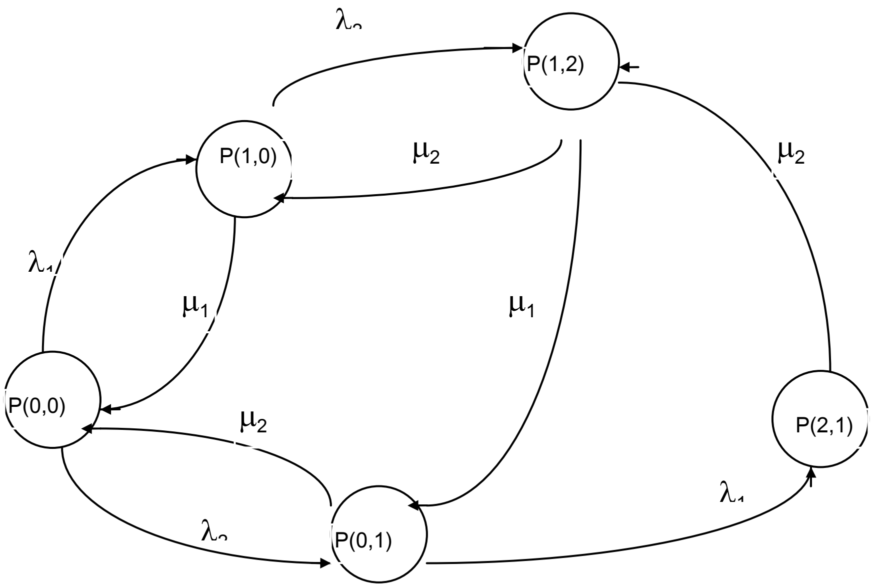
Ovo je relativno jednostavan primer, ali se korisno može primeniti u praktičnom modeliranju sistema transporta i izvoza rude.

Pretpostavka je da jedno transportno sredstvo opslužuje dva mesta utovara, koja generišu transakcije intenzitetima λ_1 i λ_2. Pošto su i transportni putevi različiti, intenziteti opsluge transakcija su μ_1 i μ_2. Šematski se ovakav sistem može prikazati kao na slici 123.



Slika 123. Jednokanalni sistem opsluge sa dva tipa transakcija

Tranzitivni dijagram ovakvog modela opsluge dat je na slici 124.



Slika 124. Tranzitivni dijagram jednokanalnog sistema opsluge sa dva tipa transakcija

Pretpostavljena disciplina čekanja je takva da se transakcije zadržavaju (izvor je blokiran) u slučaju zauzetosti transportnog sredstva. Uvedena je slučajna promenljiva S_i čija je vrednost $S_i=0$, ako je izvor prazan i $S_i=1$ ako je jedinica iz izvora i na opsluzi i $S_i=2$, ako jedinica iz izvora i čeka na opslugu. Verovatnoća stacionarnog stanja je označena kao $P\{S_1 = j, S_2 = k\} = P(j,k)$. Verovatnoće se iznalaze izjednačavanjem ulaza i izlaza u svako stacionarno stanje i korišćenjem normalizovane jednačine:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_1 + \lambda_2) * P(0,0) = \mu_1 * P(0,1) + \mu_2 * P(0,1) \\
&(\lambda_2 + \mu_1) * P(1,0) = \lambda_1 * P(0,0) + \mu_2 * P(2,1) \\
&(\lambda_1 + \mu_2) * P(0,1) = \lambda_2 * P(0,0) + \mu_1 * P(1,2) \\
&\mu_1 * P(1,2) = \lambda_2 * P(1,0) \\
&\mu_2 * P(2,1) = \lambda_1 * P(0,1) \\
&P(0,0) + P(1,0) + P(0,1) + P(1,2) + P(2,1) = 1
\end{aligned}
\qquad (190)
$$

Verovatnoće stacionarnih stanja daju uvid u ponašanje transportnog sistema. U konkretnom slučaju verovatnoće P(1,2) i P(2,1) trebaju biti što manje, jer su ta stanja nepovoljna, odnosno u tim stanjima je transportno sredstvo zauzeto, a sledeća transakcija čeka na opslugu.

8.7.2. Višekanalni sistem opsluživanja sa dva tipa transakcija - model bez čekanja

Sledeći primer predstavlja transportni sistem koji se sastoji od S kanala opluge, odnosno od S transportnih uredjaja. Transakcije dolaze iz dva izvora intenzitetom λ_1 i λ_2, dok je intenzitet transporta μ_1 i μ_2. Raspodela verovatnoća ukupnog broja jedinica u sistemu je :

$$P(j) = \frac{1}{j!} * \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right)^j * c \qquad (191)$$

$$j = j_1 + j_2$$

Konstanta c se izračunava iz normalizovane jednačine:

$$c = \left[\sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} \bullet \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) \right]^{-1}$$

Verovatnoću da je svih S kanala zuzeto daje poznata Erlang-ova B - formula, pod uslovom da se dolasci transakcija u sistem pokoravaju Poisson-ovoj raspodeli:

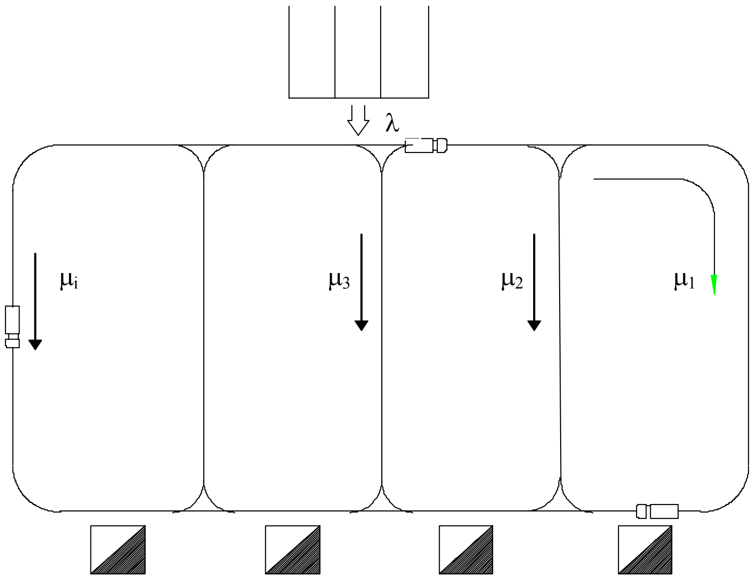
$$P(S) = \frac{\frac{\rho^s}{S!}}{\sum_{j=0}^{s} \frac{\rho^j}{j!}}, \_ \rho = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \qquad (192)$$

Sve transakcije koje generišu izvori ne mogu ući u sistem transporta, pošto je on povremeno blokiran. Zbog ovoga je potrebno uvesti novu veličinu - **intenzitet ulaska** jedinica u sistem. Ova se veličina izračunava kao:

$$Z = (1 - P(S)) \bullet \lambda\_(transakcija / \min) \qquad (193)$$

8.7.3. Višekanalni sistem sa različitim vremenima opsluživanja

Sledeći primer predstavlja transportni sistem koji se sastoji od S kanala opluge, odnosno od S transportnih uredjaja. Transakcije dolaze iz izvora intenzitetom λ, dok je intenzitet opsluge, odnosno transporta, zbog različitih dužina transportnih puteva različit i iznosi μ_i. Matematički model funkcioniše u slučaju da se dolasci transakcija u sistem pokoravaju Poisson-ovoj raspodeli, a vremena opsluge negativnoj eksponencijalnoj raspodeli. Ovakav model odgovara transportnom sistemu sa jednim utovarnim i više istovarnih mesta, kao što je šematski prikazano na slici 125.



Slika 125. Višekanalni sistem sa različitim vremenima opsluživanja

Da bi se ovaj problem rešio teorijom redova čekanja, uvodi se nova promenljiva X_i, koja ima sledeće osobine: X_i=0, ako je i-ti transportni uredjaj slobodan i X_i=1, ako je i-ti transportni uredjaj zauzet. Verovatnoća stacionarnog stanja sistema je sada:

$$\widetilde{P}(x_1, x_2 .... x_s) = P(X_1 = x_1, ... X_s = x_s) \tag{194}$$

Najjednostavniji slučaj je za $\mu_1=\mu_2= \ . \ \ . \ . =\mu_s$, pri čemu se dobija jednodimenzionalni višekanalni transportni sistem, pa se napred definisana verovatnoća može iskazati kao:

$$\widetilde{P}(x_1, x_2....x_s) = \binom{s}{j}^{-1} \bullet Pj \, , \tag{195}$$

U opštem slučaju, za različita vremena opsluživanja verovatnoća stacionarnog stanja se iskazuje kao:

$$\widetilde{P}(x_1, x_2....x_s) = \binom{s}{x_1 + x_2....x_s}^{-1} \bullet \frac{\left(\lambda_1 / \mu_1\right)^{x_1} \bullet \left(\lambda_2 / \mu_{21}\right)^{x_1} \bullet \bullet \left(\lambda_s / \mu_s\right)^{x_s}}{x_1 + x_2 + ...x_s} \bullet \widetilde{P}_0 \, , \tag{196}$$

Verovatnoća P_0, odnosno verovatnoća da je sistem prazan, dobija se iz normalizovane jednačine.

9.0. SIMULACIJA RADA PRODUKCIONIH SISTEMA

9.1. Uvod

Fizičko modelovanje ljudi su nesvesno praktikovali još od postanka ljudske vrste, odnosno od trenutka kada je ljudski um počeo da shvata svu složenost pojava i stvari koje su ga u prirodi okruživale. Međutim, za granicu kada to postaje naučno osmišljeno možemo uzeti početak XVII veka. Razvoj tehnika modelovanja i simulacije možemo ukratko prikazati sledećom tabelom:

1600-1940	-	Fizičko modelovanje
1940	-	Pojava elektronskih računara
1955	-	Simulacija u avio-industriji
1958	-	Simulacija poslovne dinamike
1960	-	Simulacija proizvodnih procesa
1968	-	Simulacioni model sveta
1970	-	Simulacija velikih ekonomskih, društvenih i ekoloških sistema
1975	-	Sistemski pristup u simulaciji
1980	-	Simulacija diskretnih stohastičkih sistema i viši nivo učešća u sistemima za podršku odlučivanju.
1990	-	Primena računarske grafike i veštačke inteligencije u simulaciji

Reč ***simulacija*** u svakodnevnoj upotrebi opisuje različite aktivnosti uključujući: složene video igre, ispitivanje različitih uticaja na let novih modela aviona, deo eksperimenta u socio-psihološkim istraživanjima, itd. Kada reč koriste računarski stručnjaci, organizatori, inžinjeri, menadžeri ili statističari, obično pod simulacijom podrazumevaju proces izgradnje apstraktnih modela koji predstavljaju neke sisteme ili podsisteme realnog sveta kao i obavljanje određenih eksperimenata nad njima. Posebno nas interesuje slučaj kada se taj eksperiment obavlja na računaru.

U smislu u kome se danas koristi, reč „simulacija” vodi poreklo iz radova Von Neuman-a i Ulam-a s kraja 40-tih godina. Oni su, rešavajući određene probleme veće složenosti, ustanovili da se rezultati ne mogu dobiti analitičkim putem, a izvođenje neposrednih eksperimenata bilo bi veoma skupo, te su pristupili korišćenju metode „Monte Karlo”. Na taj način dolazili su do matematičkih rešenja determinističkih problema stohastičkom simulacijom. Tako dobijeni rezultati imali su raspodelu verovatnoća koja je zadovoljavala matematičke relacije datog determinističkog problema.

Nagli razvoj primene simulacije, otpočet pojavom sve moćnijih računarskih sistema, vrlo brzo je izneo na površinu mnoge nedoslednosti u tumačenju ovog pojma, kao i brojna divergentna svatanja ove relativno mlade naučne discipline. Karakteristično za današnje vreme je da još uvek ne postoji jedna opšte prihvaćena definicija pojma simulacija, mada se iz brojnih naučnih radova relativno novijeg datuma, može zaključiti da se neke osnovne teoriske postavke jasno kristališu i bivaju opšte prihvaćene. Ovde će biti skrenuta pažnja na nekoliko tipičnih definicija pojma ***simulacija***, kako bi čitalac mogao da dopre do suštine u razumevanju tog pojma.

- Simulacija je imitacija skupa operacija, procesa ili ponašanja sistema koje se odvijaju u određenom periodu vremena.
- Simulacija opisuje značajne aspekte sistema kao seriju jednačina standardno uvršćenih u računarski program.
- Simulacija predstavlja pobuđivanje modela sa odgovarajućim ulazima i posmatranje odgovarajućih izlaza.
- Simulacija je numerička tehnika za obavljanje eksperimenata koristeći određene tipove matematičkih i logičkih modela kojima se opisuje ponašanje poslovnog ili ekonomskog sistema (ili nekih njegovih komponenti) u datom vremenskom periodu, a posredstvom računara.

Grubo posmatrano, proces simulacije se sastoji iz dve osnovne faze: faze izgradnje modela (modelovanje realnog sistema i njegova validacija) i faze eksperimentisanja na modelu sa analizom dobijenih rezultata. Obe ove faze uključuju brojne aktivnosti, podjednako važne za uspešno izvršavanje simulacije. Ipak, mnogi autori kod definisanja pojma simulacija, mnogo veći značaj pridaju jednoj od navedenih faza, tako da neki veću važnost pripisuju fazi izgradnje modela, dok drugi stavljaju akcenat na samo izvršenje simulacionog eksperimenta. U okviru ove knjige proces simulacije ćemo posmatrati kao skup svih aktivnosti kako u fazi izgradnje modela, tako i u fazi analize dobijenih rezultata.

U nedostatku precizne i opšte prihvaćene definicije ovog termina ***simulaciju*** će se posmatrati kao akt korišćenja računarskih programa koji reprezentuju apstraktan model realnog sistema, radi proučavanja i analize realnog sistema i njegovog ponašanja.

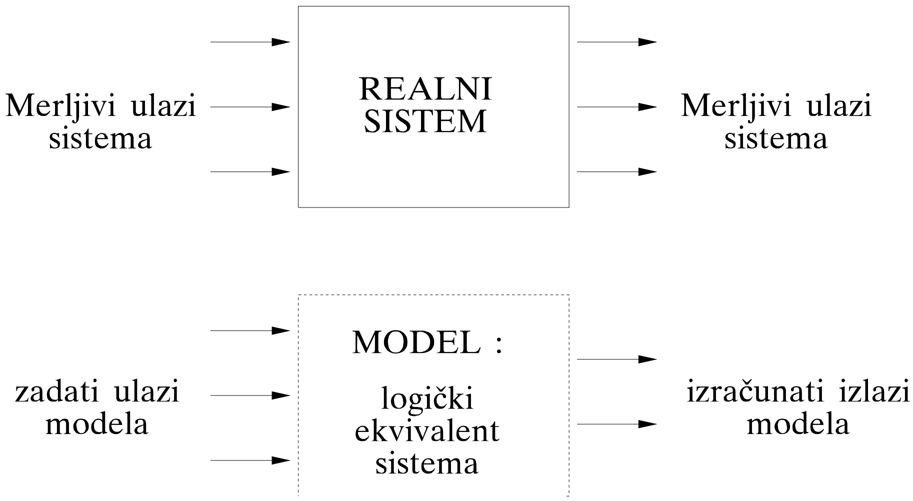
Situacije u kojima primena simulacionih tehnika može imati smisla:

- Prilikom proučavanja i eksperimentisanja sa interakcijama složenog sistema ili podsistema unutar složenog sistema.
- Pri analizi efekata promena u sistemu ili promena u okruženju mogu se simulirati, a ujedno posmatrati efekti tih promena na ponašanje modela.
- Znanje stečeno u procesu izgradnje i simulacije modela može biti od velikog značaja kod poboljšanja sistema koji se ispituje.
- Simulacija se može koristiti kao pedagoško sredstvo da pojača metodologije analitičkih rešenja.
- Simulacija se može koristiti za eksperimentisanje sa novim koncepcijama ili politikama pre nego što se izvrši njihova implementacija, tako da da nas pripremi za ono što može nastupiti.
- Simulacija se može koristiti za verifikaciju analitičkih rešenja.

Simulacija često nije jeftina a ni laka za primenu. Ponekad, neke druge metode mogu lakše i brže od simulacije, a često i sa manjim ulaganjima obezbediti zadovoljavajuće rezultate. U nekim situacijama, kao naprimer kod rešavanja suviše kompleksnih problema, simulacija može biti jedino rešenje. Osim toga, mora se postaviti pitanje tačnosti i validnosti rešenja dobijenih simulacijom. Sve ovo ukazuje na potrebu kritičkog stava u primeni simulacije i neizbežno nas navodi na pitanje kada i kako primenjivati simulaciju.

9.2. Simulacioni model

Model sistema predstavlja uprošćenu i idealizovanu (apstraktnu) sliku realnog sistema. Drugim rečima, model je opis realnog sistema sa svim onim njegovim karakteristikama koje su relevantne iz našeg ugla posmatranja. To znači da u procesu modelovanja moramo izvršiti selekciju između onih elemenata i karakteristika sistema koje su nama značajne i koje ćemo obuhvatiti modelom, od drugih, za nas irelevantnih, koje naš model neće sadržati. Stoga i kažemo da model predstavlja uprošćenu sliku sistema, te kao takav sadrži ne samo objekte realnog sistema već i određene *pretpostavke*. Koliko će naš model biti uprošćena slika realnog sistema zavisi pre svega od nivoa apstrakcije u analizi posmatranog sistema. Nivo apstrakcije u procesu modelovanja utiče na validnost modela, tj. uspešnost predstavljanja realnog sistema određenim modelom. Suviše složeni, odnosno perfektni modeli (model koji ima sposobnost da proizvede iste izlazne vrednosti, za isti skup ulaznih veličina kao i realni sistem) čak iako su mogući, gotovo po pravilu su preskupi i neadekvatni za eksperimentisanje. Stoga, opredeljujući se za nivo apstrakcije u posmatranju realnog sistema, mi moramo povući granicu negde u sistemu i to tako da model koji dobijemo bude što vernija predstava datog sistema, ali s druge strane da njegova složenost i cena ne budu ograničavajući faktori. Takav pristup može se ilustrovati slikom 126:



Slika 126. Realni sistem i model posmatrani kao „crna kutija”

9.3. Modeliranje složenih sistema metodom simulacije

Simulacija rada složenih sistema sa stohastičkom prirodom rada njihovih elemenata predstavlja moćni alat projektanata. Modeliranje složenih sistema metodama simulacije primenjuje se u sledećim slučajevima :

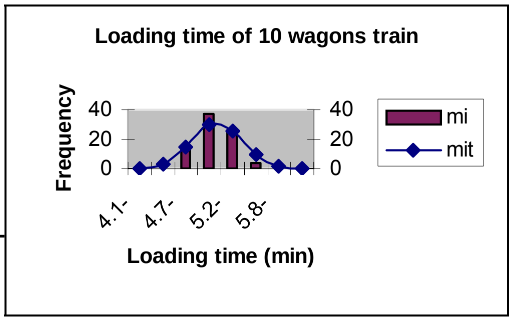
- kada analitičke determinističke metode i teorija redova čekanja ne daju zadovoljavajuće rezultate, ili je zbog prirode i složenosti problema njihova primena nemoguća,
- uvek u završnoj fazi modeliranja i optimizacije strukture i performansi složenih sistema,

Osnovna ideja je da se potpuno oponaša rad stvarnog sistema. Transakcija, pojam koji je ranije definisan u ovom radu, kreće se kroz transportni sistem, medjudejstvuje sa drugim transakcijama i okruženjem i konkuriše za raspoložive resurse sistema. Operacije u modelu su analogne operacijama u stvarnom sistemu. Transakcije se opslužuju, a ukoliko su uredjaji zauzeti, pridružuju se redovima čekanja, konkurišu za resurse sistema, a sve odluke se donose na osnovu stanja sistema.

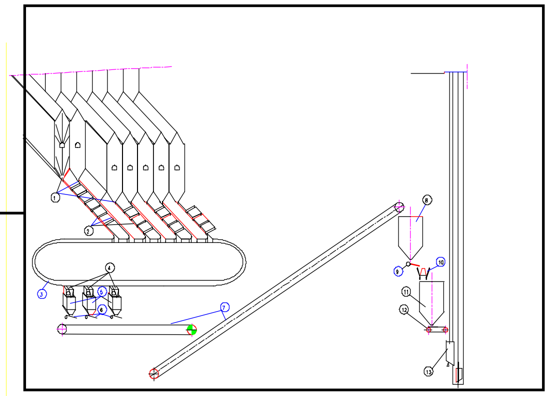
U ovom radu se predlaže algoritam izvodjenja simulacije složenih sistema, kao što je prikazano na slici 127.

IZUČAVANJE SLOŽENOG SISTEMA

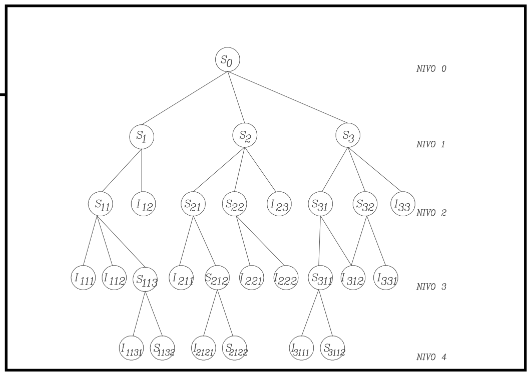
Formiranje baze podataka o ponašanju elementarnih podsistema složenog



Predstavljanje složenog sistema



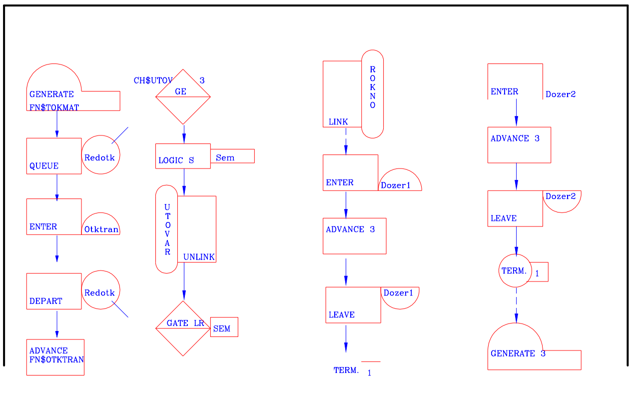
Dekompozicija složenog sistema na podsisteme do



Definisanje karakteristika elementarnih

	The. operac.	Karakteristike čvorne tačke
1.	Bušenje min. bušotina	Funkcija: Dobijanje rude Erlangova raspodela k=2, λ=1.5 tran./min. Transakcija: Q=13.76 t/tran.
3.	Transport UTM	Funkcija: Transport od otk. čela do transportnog hodnika i utovar u jamske kamione Int.trans.: λ=0.266 tran./min Vel.trans.: Q=13.76 t/tran. Erlangova raspodela k=1

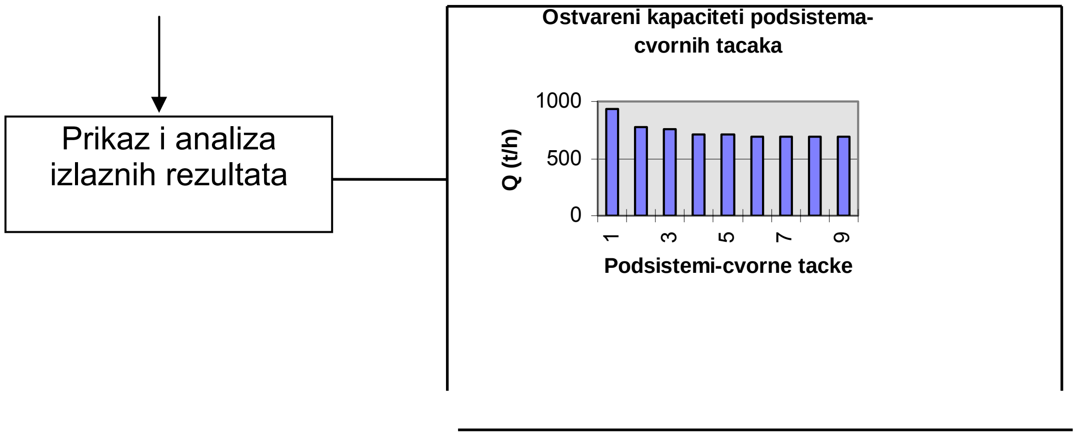
Izrada algoritma programa simulacije



Pisanje računarskog programa u izabranom

1* SIMULACIJA KOMPLETNOG TRANSPORTA
2* KAPACITET Q=760 t/h ODNOSNO 4.5 MIL.TONA /G
3* Svi parametri su dati u pratecoj semi
4* Broj UTI =5 kom
5* Broj Utov.mesta=3
6* Jamski kamioni:5 kom
7* SIMULACIJA TRAJE 6 SATI, ODNOSNO JEDNU SMENU
8
9 SIMULATE
10 1 GENERATE FN$TOKMAT
11*Transakcija: Q=13.76 t
12 2 QUEUE REDOTK
13 3 ENTER OTKTRAN

Izvodjenje simulacionog eksperimenta



Slika 127. Algoritam izvodjenja simulacionog eksperimenta na modelu složenog sistema

Prednosti korišćenja metoda simulacije su:

- ponašanje složenog (transportnog) sistema može se proučavati u toku projektovanja, i to u normalnim radnim uslovima, kao i u hipotetičkim ekstremnim uslovima, bez opasnosti po sam sistem,
- unapred se mogu otkloniti uska grla u transportnom sistemu, varijacijom radnih uslova, model može ukazati na buduća mesta smetnji , koja se izmenama u toku projektovanja, uz najniže troškove mogu otkloniti,
- pri planiranju investicija u nove ili rekonstrukcije postojećih sistema mogu se izbeći skupe greške razmatranjem ponašanja više alternativnih rešenja,
- simulacioni model se takodje može koristiti za obuku budućih korisnika realnog sistema, bez opasnosti po sistem i njih same.

9.4 Pregled modela i mogućnosti njihovog korišćenja

Pregled razmatranih modela sa mogućnostima njihovog korišćenja pri modeliranju složenih sistema transporta i izvoza rude dat je u tabeli 12.

Tabela 12. Pregled razmatranih modela

<table>
<tr><th>R. br.</th><th>Model</th><th>Struktura (tip) sistema</th><th>Primena</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Analitički modeli</td><td>Linearni sistemi, sa medjusobnim dejstvima samo izmedju susednih elemenata.
Sistemi povezanih opslužnih mesta, pri čemu je funkcionisanje opslužnih mesta nezavisno od stanja ostalih elemenata.</td><td>Modeliranje na nivou podsistema i elementarnih podsistema. Dobijena slika ponašanja sistema je uprošćena, stohastičko ponašanje se može uzeti u obzir kroz faktore medjusobnog blokiranja. Moguće korišćenje za dobijanje inicijalnih rešenja za dalju obradu metodama redova čekanja ili simulacijom.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Jednodime-nzionalni modeli redova čekanja</td><td rowspan="2">Linearni sistemi, sa medjusobnim dejstvima samo izmedju susednih elemenata.
Sistemi povezanih opslužnih mesta, pri čemu je funkcionisanje opslužnih mesta nezavisno od stanja ostalih elemenata.</td><td>Modeliranje na nivou podsistema. Dobijena slika ponašanja sistema je uprošćena.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Višedimenzioni modeli redova čekanja</td><td>Modeliranje na nivou podsistema i sistema. Ne postoje opšta rešenja, već svaki konkretni problem zahteva modeliranje i rešavanje. Modeli su bliži realnim uslovina.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Simulacioni modeli</td><td>Složeni sistemi povezanih opslužnih mesta, čije je funkcionisanje zavisno od stanja ostalih elemenata u sistemu.</td><td>Modeliranje na nivou podsistema i sistema. Potpuno oponašanje rada sistema. Obavezna primena pri modeliranju složenih sistema i u završnim fazama modeliranja.</td></tr>
</table>

9.5. Razvijeni računarski programi - Digitalna simulacija

Digitalna simulacija diskretnih događaja bavi se modeliranjem sistema na digitalnim računarima, gde se promenljive stanja mogu predstaviti skupom diskretnih događaja. Kod ove klase sistema, promene stanja se dešavaju kada se desi događaj. Tehnika modeliranja zavisi od prirode intervala odabiranja. Vremenski intervali mogu da budu slučajni ili deterministički. U principu, razlikujemo dve vrste simulacije. Asinhrona simulacija je ona u kojoj se događaji dešavaju u proizvoljnim trenucima vremena. Kod sinhrone simulacije vreme napreduje za konstantni interval odabiranja (vremenski korak).

Postoji više različitih strategija upravljanja tokom simulacije. Najopštiji algoritmi su prilazi zasnovani na događajima, aktivnostima (trofazni prilaz) i procesima. Naravno, svaka od ovih struktyra može se preslikati u bilo koju drugu. Među tri najpoznatija jezika za simulaciju diskretnih sistema spadaju: GPSS , SIMULA, SIMSCRIPT, SIMON, SIMPROCESS itd.

Razvijeni programski paketi mogu biti zasnovani na:

- narednom dogadjaju,
- na trofaznoj strategiji,
- na procesnoj strategiji.

Prilaz zasnovan na narednom dogadjaju: Procedura se sastoji u tome da se odredi naredni dogadjaj i da se izvrše sve promene zavisne od tog dogadjaja. Program zasnovan na događaju mora da uključi blokove koda koji odgovaraju na dogadjaje sistema i aktivnosti koje bi mogle da slede te dogadjje. Ovde program zahteva eksplicitnu identifikaciju podskupa aktivnosti koje koriste resurse oslobodjene od strane događaja. Na ovom principu rade simulacioni jezici, kao što su SIMSCRIPT i GASP.

Trofazna strategija najviše odgovara za modeliranje sistema kod kojih postoje složeniji uslovi za dodeljivanje resursa, odnosno složenije interakcije izmedju entiteta i resursa sistema. Kod ove strategije sva pravila odlučivanja su skoncentisana u uslovnom događaju. Veoma je pogodna za primenu simulacije sa vizuelnim izlazom zato što se

ekran može ažurirati više puta, na primer posle izvršavanja rasporedjenih dogadjaja, posle izvršavanja uslovnih događaja ili nakon ažuriranja simulacionog sata.
Glavni nedostatak trofazne strategije jeste njena relativna neefikasnost, tj. sa povećanjem veličine modela povećava se i broj uslovnih događaja kao i broj neskorisnih pozivanja uslovnih događaja. Na trofaznom prilazu zasnivaju se jezici kao što je ECSL i SIMON,

Prilaz zasnovan na procesima se može smatrati kao kombinacija strategije rasporedjivanja dogadjaja i skeniranja aktivnosti. Ovaj prilaz jenajbolji za sisteme masovnog opsluživanja gde entiteti čekaju na opslugu od strane resursa, pri čemu se entiteti dinamički prate. Ovaj prilaz je osnova strukture procesa kod simulacionih jezika SIMULA, SIMPROCESS i GPSS.

9.6. Primeri simulacionih eksperimenata

U daljem tekstu biće dati primeri simulacionih eksperimenat a izvršenih pomoću GPSS i SIMPROCESS programa.
GPSS (General Purpose Simulation System)predstavlja interpreterski jezik za simulaciju diskretnih – stohastičkih sistema. Prvu verziju ovog jezika je razvijena još 1961. godine za tadašnje računare IBM-704 i IBM-709.
GPSS je simulacioni sistem u kojem se na jednostavan način pomoću naredbi ugrađenog jezika definiše struktura modela i vrši simulacija. Po završenoj simulaciji, na raspolaganju su statistički pokazatelji o ponašanju modela u toku simulacije. GPSS je jezik orijentisan na procese. Model u GPSS jeziku predstavlja se u obliku dijagrama toka. Za konstruisanje dijagrama toka, na raspolaganju je preko pedeset različitih blokova, od kojih svaki ima svoje ime, specijalni simbol i namenu. Da bi konstruisao model, programer bira izvestan broj blokova i povezuje ih na određeni način, a zatim dobijenu strukturu prevodi u skup GPSS naredbi. Iako model u GPSS-u na prvi pogled izgleda isto kao i program u bilo k ojem opštenamenskom programskom jeziku višeg nivoa, razlike između GPSS blok naredbi u1080 i naredbi standardnih jezika su značajne. Svakom bloku odgovara jedna linija u GPSS programu, a jedan podprogram u Asembleru predstavlja jedan blok. Blokovi su statički objekti. To su redovi, uređaji (facilty), skladišta (storage), logički prekidači (logical switch), tabele i dr.

SIMPROCESS je takodje sasnovan na procesima, ali je softver koji je objektno orjentisan. Procese je moguće postaviti hijerarhijski, uz grafičku predstavu toka procesa. SIMPROCESS omogućava simulaciju diskretnih sistema, statističku obradu podataka, analizu cene koštanja. Simulacioni eksperimenti su vršeni pomoću programa SIMPROCESS Release 2.2.1 (SIMPROCESS; CACI Product Company, USA, 2000.).

Za detaljnije upoznavanje sa programima na raspolaganju je citirana literatura.

9.6.1. Simulacija rada sistema korišćenjem GPSS programa

Primer 1: Simulacija rada telefonske centrale

Potrebno je izvršiti simulaciju rada jedne automatske telefonske centrale. Na centralu je vezan veći, ali ograničen broj pretplatnika (linija). Biće korišćena sledeća terminologiju:

♦ pozivalac je pretplatnik koji pokušava da uspostavi vezu, tj. poziva neki broj;

♦ pozvani je pretplatnik sa kojim pozivalac pokušava da uspostavi vezu.

Veza između dve linije (pretplatnika) u centrali se ostvaruje preko kanala, čiji je broj takođe ograničen, ali znatno manji od broja pretplatnika. Postojanje slobodnog kanala je uslov da bi se ostvarila veza između dve linije.

Za dati primer važe sledeće polazne pretpostavke:

♦ pozivalac ne može pozvati sam sebe,

♦ ako je pozvani broj zauzet, ne dolazi do uspostavljanja veze i smatra se da je pozivalac spustio slušalicu, odnosno da je njegov broj slobodan,

♦ svaka uspostavljena veza zauzima jedan kanal,

♦ ako nema slobodnih kanala, ne dolazi do uspostavljanja veze i smatra se da su i pozivalac i pozvani broj slobodni,

♦ ako je pozvani broj slobodan i ima slobodnih kanala, dolazi do zauzimanja kanala i uspostavljanja veze,

♦ kad se uspostavi veza, podrazumeva se da su i pozivalac i pozvani broj zauzeti,

♦ smatra se da trajanje telefonskog razgovora ima eksponencijalnu raspodelu,

♦ po završetku razgovora dolazi do oslobađanja linije pozivaoca i pozvanog, kao i kanala koji se koristio za tu vezu.

Ulazni podaci za model koji mogu da se menjaju su:

♦ broj telefonskih pretplatnika u sistemu telefonske centrale,

♦ broj kanala koji su na raspolaganju za uspostavljanje veza,

♦ prosečno vreme trajanja razgovora,

♦ prosečno vreme između dva poziva u sistemu i

♦ broj pokušanih poziva koje treba simulirati.

Kao rezultat, simulacija treba da obezbedi odgovarajući skup podatka.

Tok simulacije:

♦ poruka o svakom pokušanom pozivu,

♦ poruka o svakoj uspostavljenoj vezi,

♦ poruka o neuspostavljenim vezama zbog zauzetosti kanala,

♦ poruka o neuspostavljenim vezama zbog zauzetosti pozivanog,

♦ poruka o svakom završetku razgovora.

Pregled odabranih parametara modela:

♦ broj linija, tj. telefonskih pretplatnika,

♦ broj raspoloživih kanala u centrali,

♦ broj poziva za koje se vrši simulacija,

♦ prosečno vreme trajanja razgovora,

♦ prosečno vreme između dva poziva u sistemu.

Statistika simulacije:

♦ ukupan broj poziva koji su simulirani,

♦ broj neuspelih poziva zbog zauzetosti kanala,

♦ broj neuspelih poziva zbog zauzetosti linija,

♦ broj poziva koji su u toku,

♦ vreme za koje su obavljeni svi pozivi, tj. vreme simulacije.

Parametri modela koji se simulira su sledeći:

♦ maksimalni broj linija (MAXL) je 100,

♦ maksimalni broj kanala (MAXK) je 20,

♦ srednje vreme između dva poziva (TPOZ) je 15 *s,*

♦ srednje vreme trajanja razgovora (TRAZ) je 150 *s.*

Metod izgradnje GPSS programa je sledeći:

♦ svakoj telefonskoj liniji se dodeljuje jedan prekidač (SWITCH), pri čemu položaj prekidača "uključen" označava da je linija zauzeta;

♦ kanalima se dodeljuje jedno skladište kapaciteta dvadeset;

♦ uvodi se jedan tip transakcija sa dva parametra:

♦ p1 - broj pozivaoca,

♦ p2 - pozvani broj;

♦ vremenska jedinica je 1 sekunda;

♦ simulacija traje 1000 poziva isključujući prelazno stanje 50 poziva.

Listing programa u GPSS-u:

```
SIMULATE
*
EXPO1 FUNCTION RN2,C24 Eksponencijalna raspodela
```



```
0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.355/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/
.75,1.38/.8,1.6/.84,1.83/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/
.95,2.99/.96,3.2/.97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/
.999,7/.9998,8
EXPO2 FUNCTION RN3,C24 Eksponencijalna raspodela
0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.355/.4,.509/.5,.69/.6,.915/.7,1.2/
.75,1.38/.8,1.6/.84,1.83/.88,2.12/.9,2.3/.92,2.52/.94,2.81/
.95,2.99/.96,3.2/.97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/
.999,7/.9998,8
*
GENERATE X$TPOZ,FN$EXPO1 GENERISANJE POZIVA
TEST G V$LIN,2,ODB POZIV SE ODBACUJE AKO JE BROJ
* SLOBODNIH LINIJA MANJI OD 2
BROJ1 ASSIGN 1,V$UNIF ODREDJIVANJE BROJA POZIVAOCA
GATE LR *1,BROJ1 DA LI JE POZIVALAC ZAUZET
LOGIC S *1 POZIVALAC POSTAJE ZAUZET
BROJ2 ASSIGN 2,V$UNIF ODREDJIVANJE POZIVNOG BROJA
TEST NE P1,P2,BROJ2 TESTIRANJE DA LI JE P1 <> P2
GATE SNF KANAL,ZKAN AKO IMA SLOB. KANALA ZAUZMI KAN.
UZMIK ENTER KANAL ZAUZIMANJE KANALA
GATE LR *2,ZLIN DA LI JE POZIVNI BROJ SLOBODAN
LOGIC S *2 ZAUZMI POZIVNI BROJ
ADVANCE X$TRAZ,FN$EXPO2 TRAJANJE RAZGOVORA
LOGIC R *1 POZIVAOC POSTAJE SLOBODAN
LOGIC R *2 POZVANI POSTAJE SLOBODAN
LEAVE KANAL OSLOBADJA SE JEDAN KANAL
SAVEVALUE USPOZ+,1 REGISTR. BROJA USPEŠNIH POZ.
TERMINATE 1 UKLANJANJE TRANSAKCIJE
*
ODB SAVEVALUE ODPOZ+,1 REGISTR. BROJA ODBAČENIH POZIVA
```

```
TERMINATE UKLANJANJE TRANSAKCIJE
*
ZKAN LOGIC R *1 AKO NEMA SLOB. KANALA POZIVALAC
* OSTAVLJA SLUŠALICU
SAVEVALUE NUPOZ+,1 REGISTR. BROJA NEUSPEŠNIH POZIVA
* ZBOG ZAUZETOSTI KANALA
TERMINATE 1 UKLANJANJE TRANSAKCIJE
ZLIN LOGIC R *1 POZIVALAC OSTAVLJA SLUSALICU JER
* JE POZVANI BROJ BIO ZAUZET
LEAVE KANAL OSLOB. KANALA; POZVANI BROJ JE
* BIO
ZAUZET
SAVEVALUE NPOZB+,1 REGISTR. BROJA NEUSPESNIH POZ.
* ZBOG ZAUZETOSTI LINIJE POZVANOG
TERMINATE 1 UKLONI TRANSAKCIJE (NEUSP. POZ.)
*
KANAL STORAGE 20 BROJ KANALA
*
LIN VARIABLE X$MAXL-S$KANAL*2-2 BROJ SLOBODNIH LINIJA
UNIF VARIABLE X$MAXL*RN1/1000+1 IZABIRANJE LINIJE
*
INITIAL X$MAXL,100 CENTRALA IMA 100 LINIJA
INITIAL X$TRAZ,150 SREDNJE VREME TRAJANJA RAZ.
INITIAL X$TPOZ,10 SREDNJE VREME IZMEDJU POZ.
*
START 50,NP 50 POZIVA PRELAZNI REŽIM
RESET RESETOVANJE SIMULATORA
INITIAL X$USPOZ,0
INITIAL X$ODPOZ,0
INITIAL X$NUPOZ,0
INITIAL X$NPOZB,0
*
START 1000 SIMULIRATI 1000 POZIVA
END
```

Rezultati simulacije:

```
GPSS/FON Ver. 2.0, Simulating results
Relative clock 9623 Absolute clock 10203
Block counts
Block Current Total
1 0 1002
2 0 1002
3 0 1336
4 0 1336
5 0 1002
6 0 1013
7 0 1013
8 0 1002
9 0 999
```

10 0 999
11 0 765
12 13 776
13 0 763
14 0 763
15 0 763
16 0 763
17 0 763
18 0 0
19 0 0
20 0 3
21 0 3
22 0 3
23 0 234
24 0 234
25 0 234
26 0 234

Storage	Capacity	Average Contents	Average Utilisation	Entries	Average Time/tran	Current Contents	Maximum Contents
1	20	11.896	0.595	1010	113.341	13	20

SaveValues
X$1 = 100
X$2 = 150
X$3 = 10
X$4 = 763
X$6 = 3
X$7 = 234

Simulacijom su dobijeni sledeći rezultati: od 1000 poziva, broj uspešnih poziva bio je 763, broj neuspešnih poziva zbog zauzetosti kanala bio je 3, a neuspešnih poziva zbog zauzetosti linije bilo je 234.

9.6.2. Simulacija rada sistema korišćenjem programa SIMPROCESS

Primer 1: Simulacija rada šalterske službe u banci

U banci radi šalter za podizanje novca, šalter za uplate i šalter za proveru stanja tekućih računa gradjana.

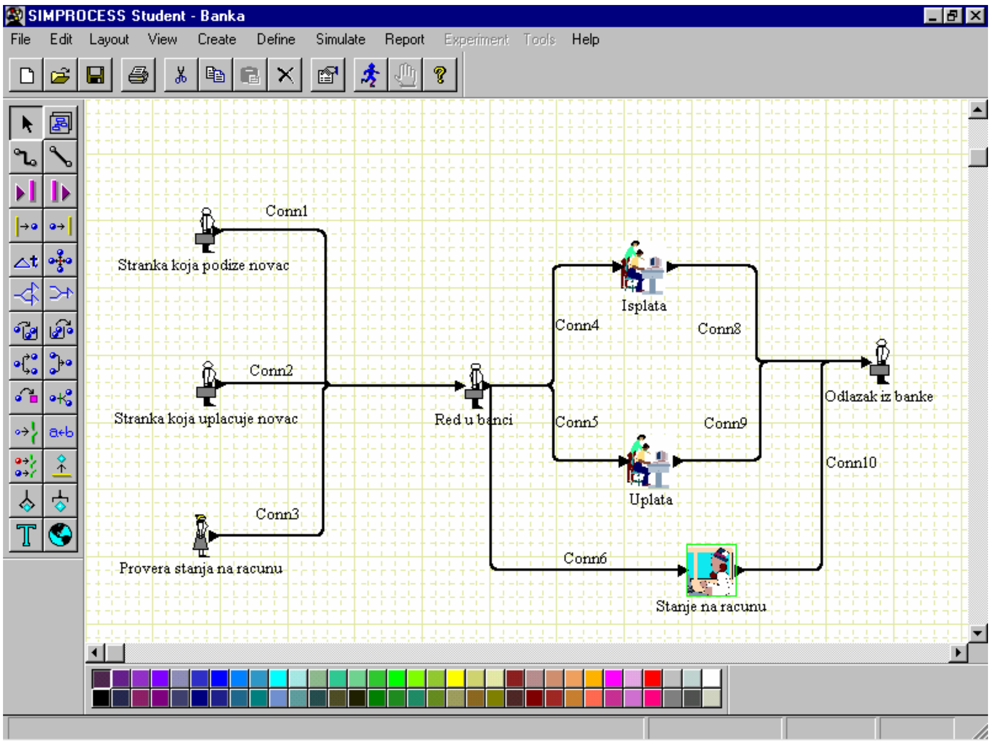
Snimanjem u toku radnih dana su ustanovljene raspodele vremena izmedju dolazaka klijenta, kao i raspodele vremena trajanja opsluge na pojedinim šalterima (opslužnim mestima), i to:

- dolazak klijenata koji podižu novac: $E_1(10.0)$
- dolazak klijenata koji ulažu novac: $E_1(20.0)$
- dolazak klijenata koji kontrolišu stanje na tekućem računu: $E_1(30.0)$
- opsluga podizanja novca: E_1 (7.0)
- opsluga ulaganja novca: E_1 (7.0)
- provera stanja na tekućem računu: E_1 (3.0).

Izvršiti simulaciju rada šalterske službe u trajanju od jedne smene i odrediti osnovne parametre rada sistema.

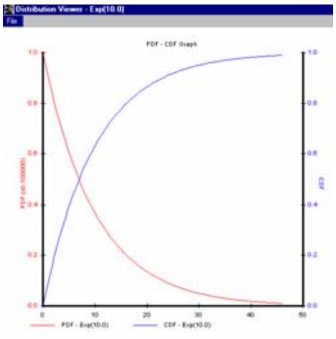
Rešenje:

Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom je dat na slici 128.

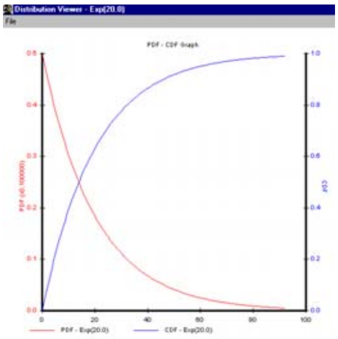


Slika 128. Izgled ekrana sa postavljenim zadatkom

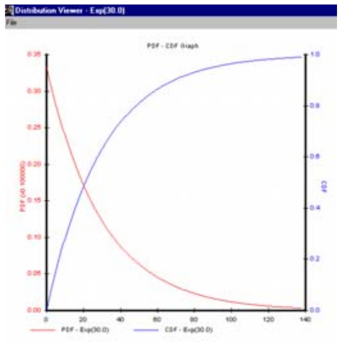
Izgled ustanovljenih i zadatih raspodela vremena izmedju nailzaka i vremena opsluživanja klijenata je dat na slici 129.



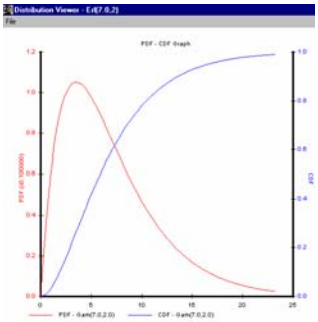
Nailazak klijenata koji podižu novac



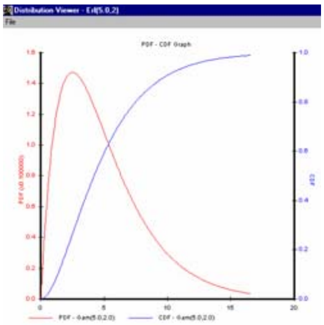
Nailazak klijenata koji ulažu novac



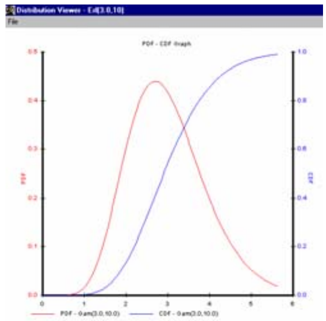
Nailazak klijenata koji proveravaju stanje na računu



Opsluživanje klijenata koji podižu novac



Opsluživanje klijenata koji ulažu novac



Opsluživanje klijenata koji proveravaju stanje na računu

Slika 129. Raspodele vremena izmedju nailazaka i vremena opsluživanja klijenata

Procesa rada šalterske službe je simuliran u toku jedne smene. Rezultati simulacionog eksperimenta su dati u standardnom izveštaju, kao što sledi:

SIMPROCESS Standard Report
Extracted from output file: C:/My Documents\FACULTY/Operaciona istrazivanja/Zadaci/Simulacija/Banka/Stat1.mon
Simulation Concluded at : Tue Nov 11 14:56:24 2003

Model Start Date/Time : 5/24/2003 07:00:00
Model End Date/Time : 5/24/2003 14:00:00
Actual Start Date/Time : 5/24/2003 07:00:00
Actual End Date/Time : 5/24/2003 14:00:00

Entity : Total Count - Observation Based : Replication 1

Entity Names	Total Generated	Remaining In System	Total Processed
Podizanje novca	39	1	38
Uplacivanje nov	20	1	19
Stanje na racun	9	0	9

Entity : Count By State - Time Weighted : Replication 1

	Total In System-----		Duration At Activity		Wait For Resources--		Hold For Conditions-	
Entity Names	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum
Podizanje novca	1.156	5	0.638	2	0.518	4	0.000	0
Uplacivanje nov	0.224	2	0.189	2	0.035	1	0.000	0
Stanje na racun	0.054	1	0.054	1	0.000	1	0.000	0

Entity : Cycle Time (in Hours) By State - Observation Based : Replication 1

		Total In Process----		Duration At Activity		Wait For Resources--		Hold For Conditions-	
Entity Names	#Observed	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum
Podizanje novca	38	0.212	0.558	0.117	0.355	0.095	0.517	0.000	0.000
Uplacivanje nov	19	0.081	0.213	0.068	0.191	0.013	0.168	0.000	0.000
Stanje na racun	9	0.042	0.070	0.042	0.070	0.000	0.000	0.000	0.000

Resource : Number of Units By State - Time Weighted : Replication 1

		-----Idle-------- -		-------Busy--------		Planned Downtime--		-Unplanned Downtime-		------Reserved------	
Resource Names	Capacity	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum	Average	Maximum
Uplata	1.000	0.811	1.000	0.189	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Isplata	2.000	0.724	2.000	1.276	2.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Provera stanja	1.000	0.946	1.000	0.054	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Resource : Percent Utilization By State : Replication 1

Resource Names	Idle	Busy	Planned	Unplanned	Reserved
Uplata	81.093%	18.907%	0.000%	0.000%	0.000%
Isplata	36.179%	63.821%	0.000%	0.000%	0.000%
Provera stanja	94.631%	5.369%	0.000%	0.000%	0.000%

Resource : Percent Utilization By State When Available : Replication 1

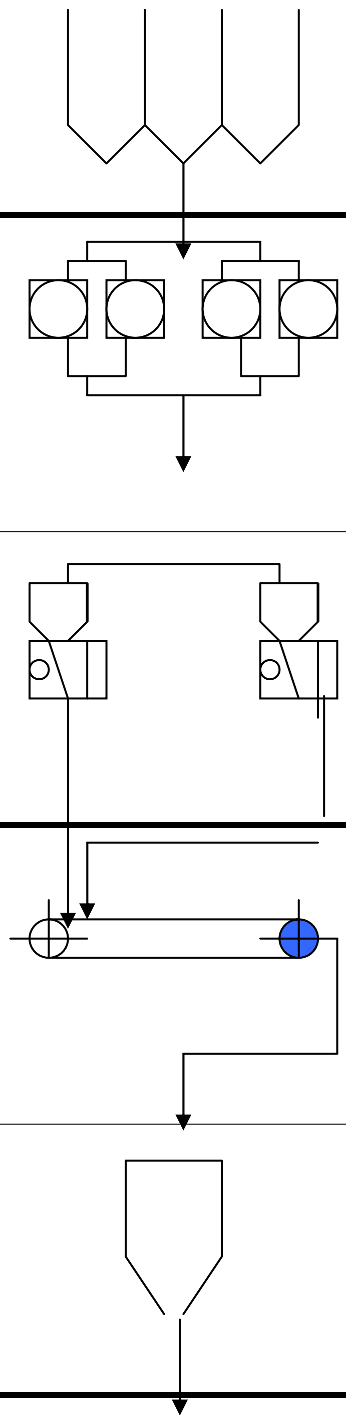
Resource Names	Idle	Busy	Reserved
Uplata	81.093%	18.907%	0.000%
Isplata	36.179%	63.821%	0.000%
Provera stanja	94.631%	5.369%	0.000%

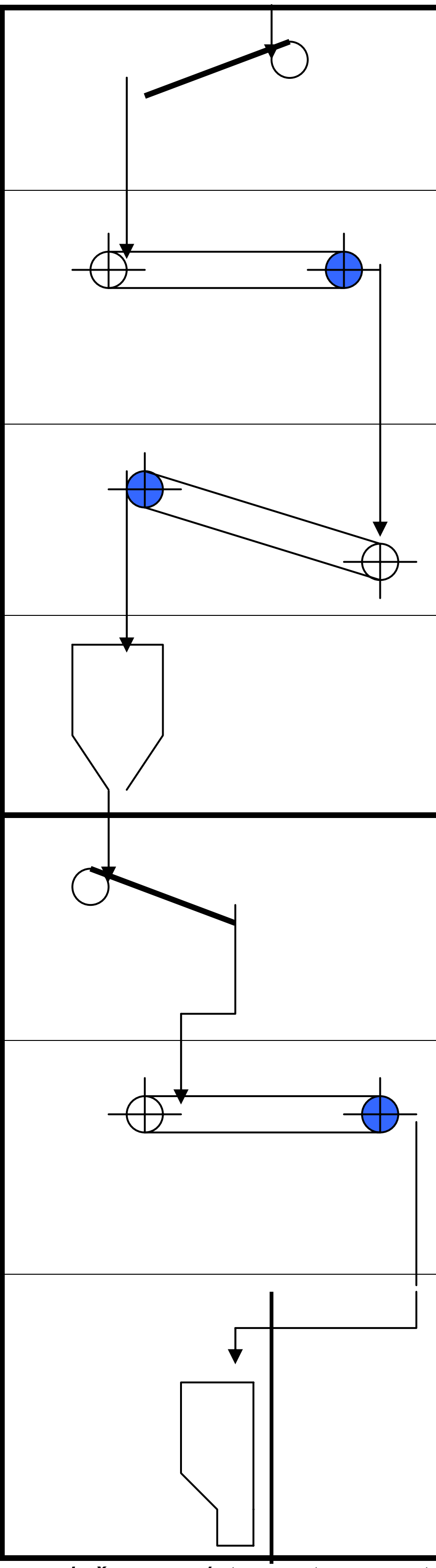
Activity : Total Entity Count at Selected Activity - Observation Based : Replication 1

Activity Names	Total Accepted	Remaining In Act.	Total Exited
Stranka koja po	0	0	39
Stranka koja up	0	0	20
Provera stanja	0	0	9
Isplata	39	1	38
Uplata	20	1	19
Stanje na racun	9	0	9
Odlazak iz bank	66	0	0

Primer 2. Sistem transporta i izvoza rude

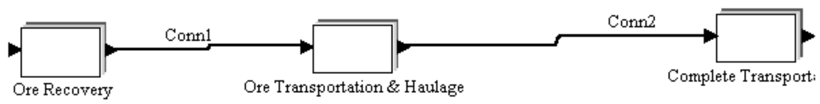
Šematski prikaz složenog sistema sa karakteristikama elemenata dat je na slici 130.

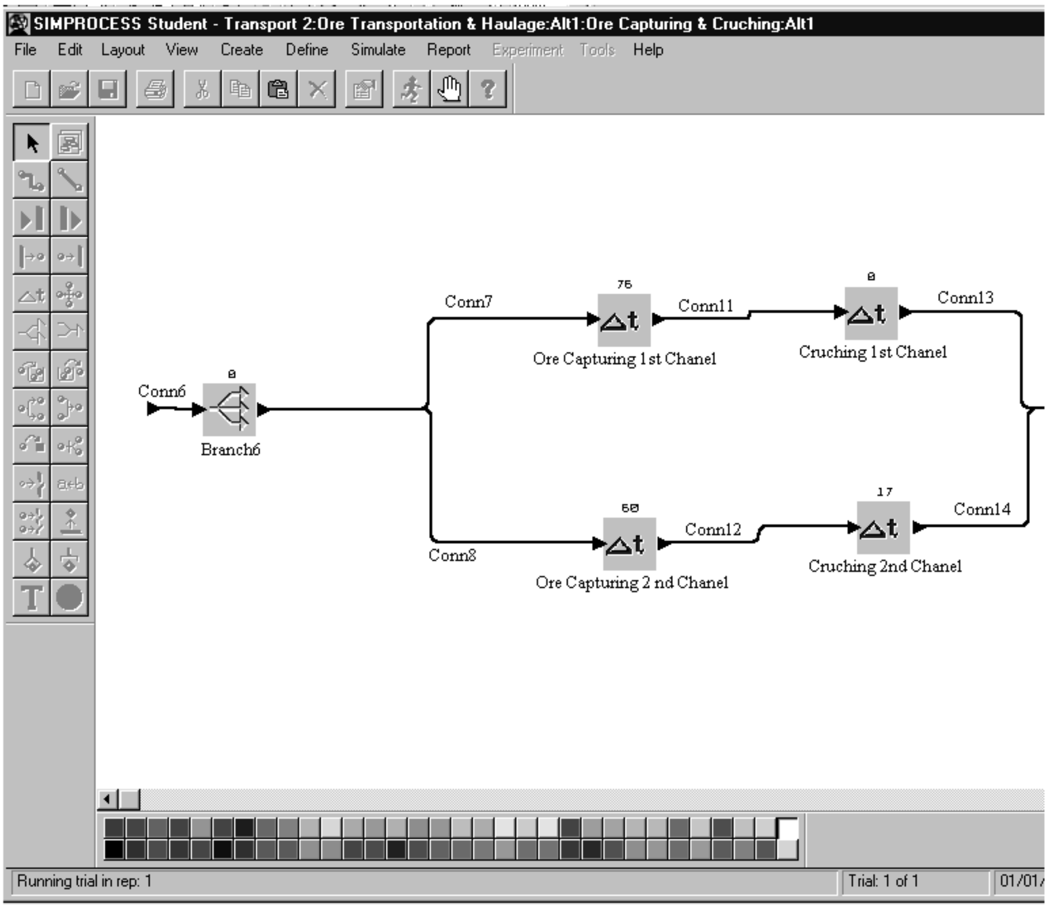
S0 –SLOZENI SISTEM TRANSPORTA I IZVOZA RUDE –VAR. RESENJE V5			
PODSISTEM	ELEMENTARNI SISTEMA	ŠEMATSKI PRIKAZ	KARAK. ELEMENTA SISTEMA
	OTKOPNO ČELO Generisanje transakcija		Pretpostavka: Na otkopnom čelu uvek ima odminirane rude Generisanje transakcija: Erlangova raspodela $k=2,\lambda=2$ Transakcija: Q=13,46 t rude
S1 PODSISTEM ZAHVATA I OTKOPNOG TRANSP. RUDE	S11/S12 Zahvat i transport odminirane rude UTI mašine n=4 mšina		Broj kanala: C=2 Broj uredjaja: n= 4 Intenzitet opsluge po uredj.: $\mu=0.333$ trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Erlangova $k=6$, $\lambda=4$
	S13 Drobljenje rude Mobilne drobilice n= 2 kom.		Broj kanala: C=2 Broj uredjaja: n= 2 Intenzitet opsluge po uredj.: $\mu=0.61$ trans./min. Kapacitet privrem. skladištenja: Q=2 trans./kanalu Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(1.64; 0.03)
S2 PODSISTEM TRANSP. NA NIVOU OTKOPA	S21/S22/S23 Utovar, transport na nivou utkopa i istovar rude u rudno okno Trakasti transporter promenljive dužine		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : $\mu=1{,}16$ trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.86; 0.01)
	S24 Privremeno skladištenje rude Rudno okno		Disciplina čekanja: FIFO Zapremina RO: V=700 m^3 (V= 30 transakcija)

S3 PODSISTEM TRANSP. NA NIVOU GTH I U GTU	S31 Utovar u transportno sredstvo Vibracioni dodavač		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=1,16 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.86; 0.01)
	S32/S33 Transport na nivou GTH i istovar rude Transporter sa gumenom trakom		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=1,16 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.86; 0.01)
	S34/S35 Transport u GTU i istovar rude Transporter sa gumenom trakom		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=1,16 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.86; 0.01)
	S36 Privremeno skladištenje rude Centralno rudno okno		Disciplina čekanja: FIFO Zapremina RO: V=2500 m^3 (V= 100 transakcija)
S4 PODSISTEM IZVOZA	S41 Istakanje rude iz CRO Vibracioni dodavač n= 2 dodava		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=3.33 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.3; 0.01)
	S42 Utovar u sredstvo izvoza Trakasti dodavač n= 2 dodavača		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=3.33 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(0.3; 0.01)
	S43/S44 Izvoz rude i istovar rude Izvozno potrojenje KOEPE		Broj kanala: C=1 Intenzitet opsluge : μ=1 trans./min. Usvojena f-ja raspodele vremena opsluge: Normalna N(1; 0.1)

Slika 130. Šematski prikaz složenog sistema transporta i izvoza – početno rešenje

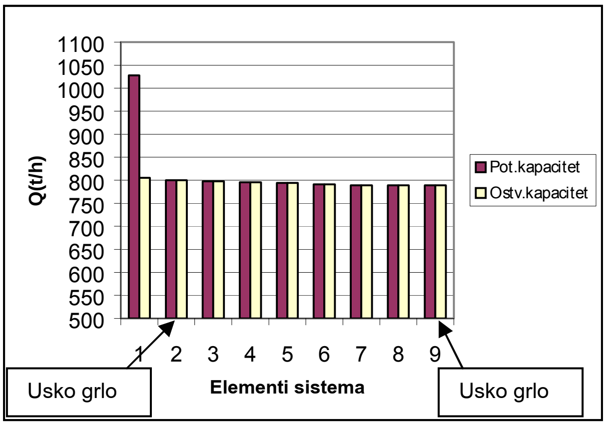
Globalni izgled modela (koji je postavljen hijerarhijski) i izgled ekrana računara za vreme vršenja simulacionog eksperimenta dati su na slici 131.



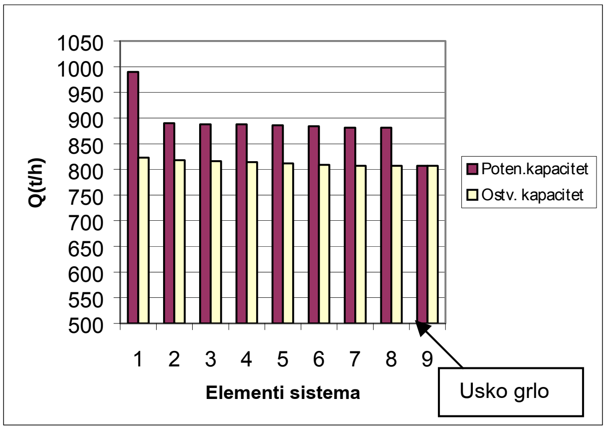


Slika 131. Vršenje simulacionog eksperimenta pomoću programa SIMPROCESS

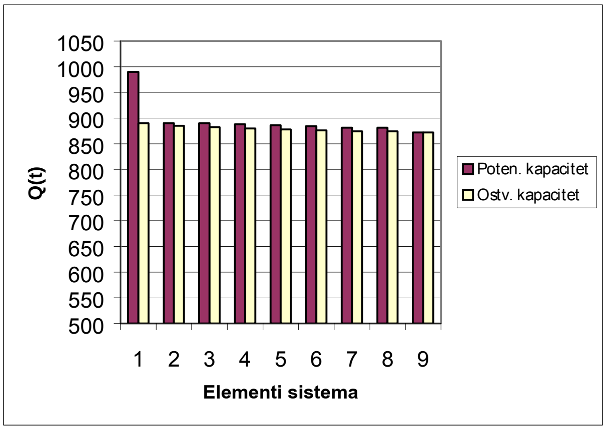
Deo rezultata simulacionih eksperimenata nad proučavanim složenim sistemom dat je na slici 132.



- početno rešenje -



- prvi korak optimizacije -



- drugi korak optimizacije -

Legenda:

1. Zahvat i transport odminirane rude (S11/S12)
2. Drobljenje rude na otkopu (S13)
3. Transport na nivou otkopa (S21/S22/S23)
4. Utovar u sredstvo transporta na GTH (S31)
5. Transport na nivou GTH (S32/S33)
6. Transport u GTU (S34/S35)
7. Istakanje rude iz CRO (S41)
8. Utovar u sredstvo izvoza (S42)
9. Izvoz (S42/S44)

Slika 132. Potencijalni i ostvareni kapaciteti čvornih tačaka – rezultat simulacionih eksperimenata

Simulacioni eksperimenti su ukazali na uska grla u sistemu. Poboljšanje performansi sistema dobijene su konačne projektne promenljiveelemenata, podsistema i složenog sistema.

10. UPRAVLJANJE ZALIHAMA

Za rad produkcionih sistema bez sastoja neophodno je obezbediti odredjene količine zaliha sirovina, repromaterijala, delova i slično. Sa druge strane, da bi se zadovoljile potrebe tržišta, odnosno da bi se u ma kom trenutku mogli isporučiti traženi proizvodi, stvaraju se zalihe gotovih proizvoda.

Stvaranje zaliha zapravo predstavlja angažovanje obrtnih sredstava, koja se troše za nabavku, za troškove skladištenja, održavanja, kamate i slično.

Glavno pitanje je koliko je ekonomično držati na skladištima sirovine i repromaterijal, nedovršenu proizvodnju, rezervne delove i gotove proizvode. Naći optimum podrazumeva minimizirati troškove zaliha, uz održanje kontinualnosti proizvodnog procesa i podmirenja zahteva tržišta.

Zalihe se mogu podeliti prema svojoj svrsi i nameni na sledeće kategorije:

- Zalihe reprodukcionog materijala

U ove zalihe spadaju sirovine, materijali potrebni za proizvodnju, potrošni materijali, sitan inventar, amblaža i slično.

- Zalihe gotovih proizvoda
- Zalihe rezervnih delova

Ove zalihe se javljaju kod proizvodjača mašina i uredjaja koje se plasiraju na tržištu i podrazumevaju rezervne delove za intervencije u garantnom roku, rezervne delove za intervencije servisne službe po zahtevu korisnika i delove mašina i uredjaja koji se više ne proizvode, ali za čijim rezervnim delovima ima i dalje potražnje.

- Zalihe nedovršene proizvodnje

Ove zalihe čine delovi koji još nisu završeni i spremni za ugradnju u finalni proizvod posmatranog produkcionog sistema. Ove zalihe se mogu nalaziti u proizvodnim pogonima ili u medjufaznim skladištima.

Da bi se matematički moglo izvršiti modeliranje (minimizacija) količina zaliha, moraju se poznavati sledeći parametri:

- potrošnja zaliha, koja može biti konstantna ili promenljiva u razmatranom periodu,
- vreme potrebno za obezbedjenje nove količine zaliha (vreme izmedju trenutka naručivanja i prispeća u skladište),
- nabavne cene,

- raspoloživi kapaciteti skladištenja po svakom artiklu koji se skladišti,
- troškovi skladištenja – redovni,
- troškovi skladištenja – vanredni, u slučaju kada se hitno angažuje ili iznajmljuje dodatni skladišni prostor.

Kao rezultat modeliranja, trebaju se dobiti sledeći parametri:

- optimalna veličina serije uz minimalne troškove zaliha u posmatranom vremenskom periodu,
- vreme naručivanja odredjenog artikla, da bi troškovi bili minimalni.

Sami modeli zaliha se mogu podeliti na:

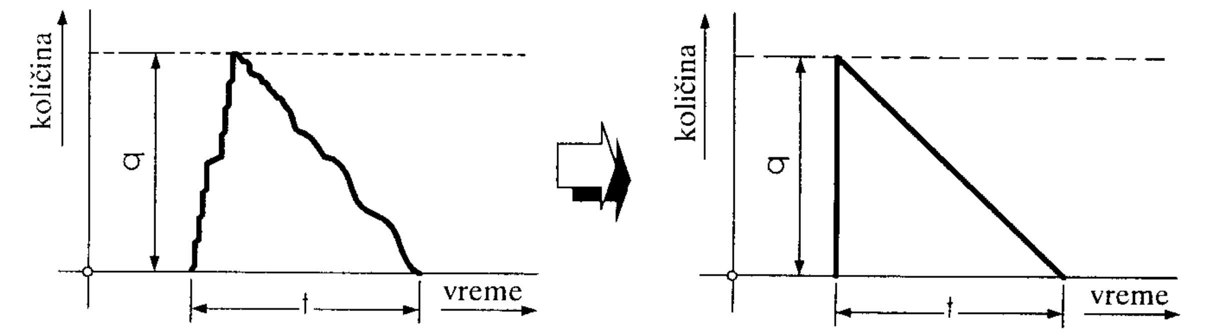
- dinamičke modele, i
- statičke modele.

Prema prirodi problema (tražnja, nabavka, proizvodnja), modeli mogu biti:

- deterministički, koji će biti razmatrani u ovom poglavlju, i
- stohastički.

10.1. Model zaliha sa konstantnom nabavkom

Model se može primenjivati uz ograničenje da je potražnja, odnosno trošenje zaliha konstantno, a da je nabavka trenutna. Idealni i stvarni proces nabavke i trošenja zaliha je dat na slici 133.

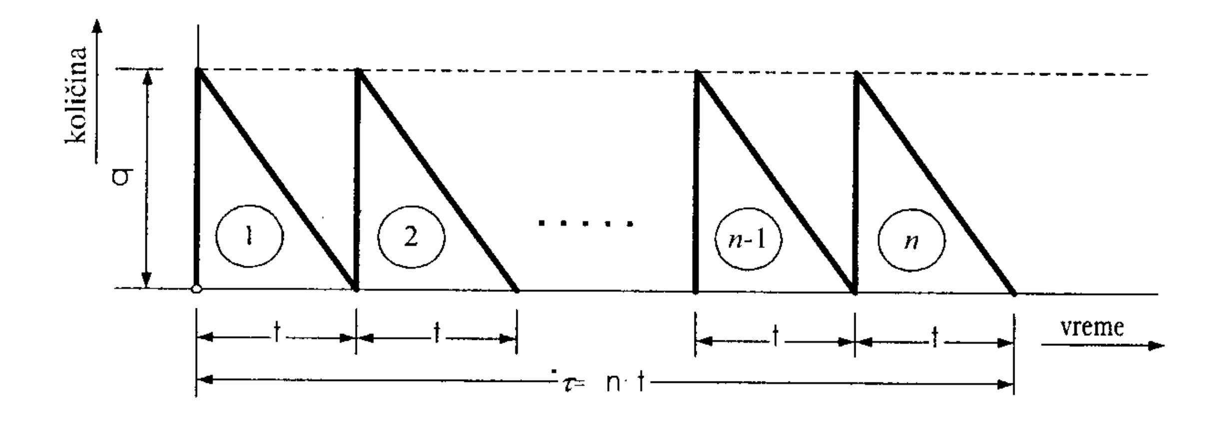


a) Stvarni proces b) Idealni proces

Slika 133. Nabavka i trošenje zaliha

Upravljanje zalihama ima za cilj da se u svakom trenutku može vršiti kontrola količine i asortimana zaliha na skladištu i na vreme reagovati, odnosno, naručiti nove količne, a sve u cilju održavanja kontinualnosti proizvodnje.

Razmatrani model podrazumeva periodičnu dostavu novih količina, po odredjenom taktu, Naknadne interventme nabavke nisu predvidjene, nedostatak zaliha, odnosno negativne zalihe nisu dopustive. Ovakav model je dat na slici 134.



Slika 134. Model sa konstantnom periodičnom nabavkom i lineranim trošenjem zaliha

Iz prednjeg proizilazi da se funkcija troškova može predstaviti kao zbir troškova nabavke i troškova skladištenja zaliha:

$$f(q) = k_0 + k_1 * \bar{q} * t \qquad (197)$$

gde su:

k_0 (din) – troškovi redovne nabavke delova, repromaterijala u jednoj seriji,

k_1(din/kom./danu) - jedinični troškovi skladištenja artikala u definisanom vremenskom intervalu,

$\bar{q}$ (kom)- prosečna količina zaliha u posmatranom vremenskom periodu,

t (dan) - posmatrani vremenski period

Funkcija ukupnih troškova za sve periode nabavke i trošenja u posmatranom periodu τ (recimo 1 godina) je:

$$F(q) = n * f(q) = n(k_0 + k_1 * \bar{q} * t) = k_0 \frac{Q}{q} + k_1 * \frac{q}{2} * \tau \qquad (198)$$

Minimum ove funkcije će se dobiti izjednačavanjem prvog izvoda po količini q sa 0.

$$\frac{dF(q)}{q} = 0 \Rightarrow -k_0 * Q * q^{-2} + \frac{1}{2} k_1 * t = 0 \qquad (199)$$

$$q^* = \sqrt{\frac{2 * k_0 * Q}{k_1 * \tau}} \qquad (200)$$

Količina q^* je optimalna veličina serije, odnosno veličina (količina) koja obezbedjuje najniže troškove po seriji.

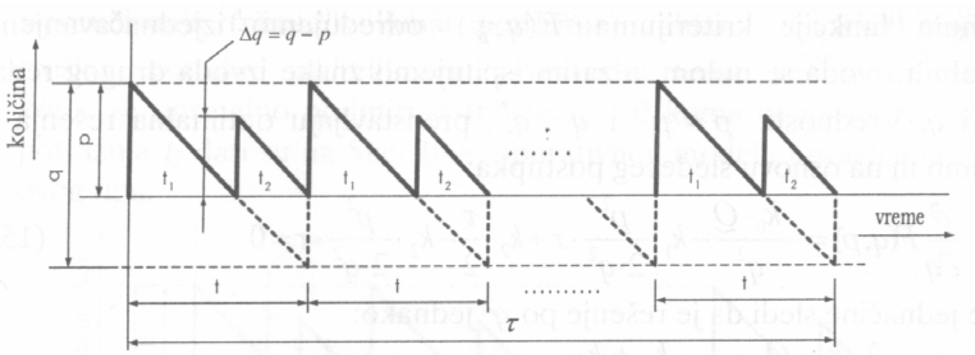
Optimalni ukupni troškovi u posmatranom periodu su sada:

$$F(q^*) = k_0 \frac{Q}{q^*} + k_1 \frac{q^*}{2} \tau$$
$$\min F(q) = \sqrt{2 k_0 k_1 Q \tau} \qquad (201)$$

Funkcija F(q) ima minimum, što se dokazuje time da je drugi izvod veći od 0.

10.2. Model zaliha sa naknadnim naručivanjem

Ovo je kompleksniji model i predstavlja slučaj kada je potražnja veća od nabavljenih zaliha. Za razliku od prethodne varijante sa regularnom nabavkom, u ovom modelu je pored regularne nabavke (p) predvidjena i interventna nabavka (q), kao što je prikazano na slici 135.



Slika 135. Model zaliha sa interventnom nabavkom

Vremenski veriodi t_1 i t_2 se mogu izraziti kao:

$$t_1 = \frac{p}{q} t;..i..t_2 = t - t_1 = (1 - \frac{p}{q})t \tag{202}$$

Srednja količina zaliha u periodu t je $\bar{p} = \frac{p}{2}$, pa su troškovi finansiranja zaliha u ovom periodu $\bar{p} \cdot k_1 \cdot t_1$. Srednja količina nedostajućih (interventnih) zaliha u vremenskom periodu t_2 je $\overline{\Delta q} = \frac{1}{2} \cdot (q - p)$, pa su troškovi za njihovo servisiranje $\frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot t_2 \cdot (q - p)$. Funkcija troškova za ukupni period t je:

$$f(q,p) = k_0 + \overline{p} \cdot k_1 \cdot t_1 + \overline{\Delta q} \cdot k_2 \cdot t_2 = k_0 + \frac{p}{2} \cdot k_1 \cdot t_1 + \frac{q-p}{2} \cdot k_2 \cdot t_2 \tag{203}$$

gde su:

k_0 (din) - troškovi nabavke zaliha,

k_1(din/kom/danu) – troškovi skladištenja regularnih zaliha za vremenski period t_1

k_2 (din/kom/danu) – troškovi nabavke i skladištenja interventnih zaliha u vremenskom periodu t_2

Za ceo posmatrani vremenski period τ funkcija ukupnih troškova je:

$$\begin{aligned} F(q,p) &= (k_0 + \frac{p}{2} \cdot k_1 \cdot t_1 + \frac{q-p}{2} \cdot k_2 \cdot t_2) \cdot n \\ F(q,p) &= k_0 \cdot \frac{Q}{q} + k_1 \cdot \frac{p^2}{2 \cdot q} \cdot \tau + k_2 \cdot \frac{(q-p)^2}{2 \cdot q} \cdot \tau \end{aligned} \tag{204}$$

Minimum funkcije ukupnih troškova će se odrediti izjednačavanjem parcijalnih izvoda (po q i po p) sa nulom, uz uslov da su izvodi drugog reda veći od nule.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} F(q,p) &= \frac{k_0 \cdot Q}{q^2} - k_1 \cdot \frac{p^2}{2 \cdot q^2} \cdot \tau + k_2 \cdot \frac{\tau}{2} - k_2 \frac{p^2}{2 \cdot q^2} \cdot \tau = 0 \\ q^2 &= \frac{2 \cdot q_0 \cdot Q}{k_2 \cdot \tau} + p^2 \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_2} \end{aligned} \tag{205}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}F(q,p) = k_1 \cdot \frac{p}{q} \cdot \tau - k_2 \frac{q-p}{q} \cdot \tau = 0$$
$$p = q \cdot \frac{k_2}{k_1 + k_2} \qquad (206)$$

Optimalne količine zaliha su:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_0 \cdot Q}{k_1 \cdot \tau}} \cdot \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_2}};..p^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_0 \cdot Q}{k_1 \cdot \tau}} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1 + k_2}} \qquad (207)$$

Minimalna vrednost funkcije cilja je sada:

$$\min F(q,p) = \sqrt{2 \cdot k_0 \cdot k_1 \cdot \tau \cdot Q} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1 + k_2}} \qquad (208)$$

10.3. Zalihe nedovršene proizvodnje

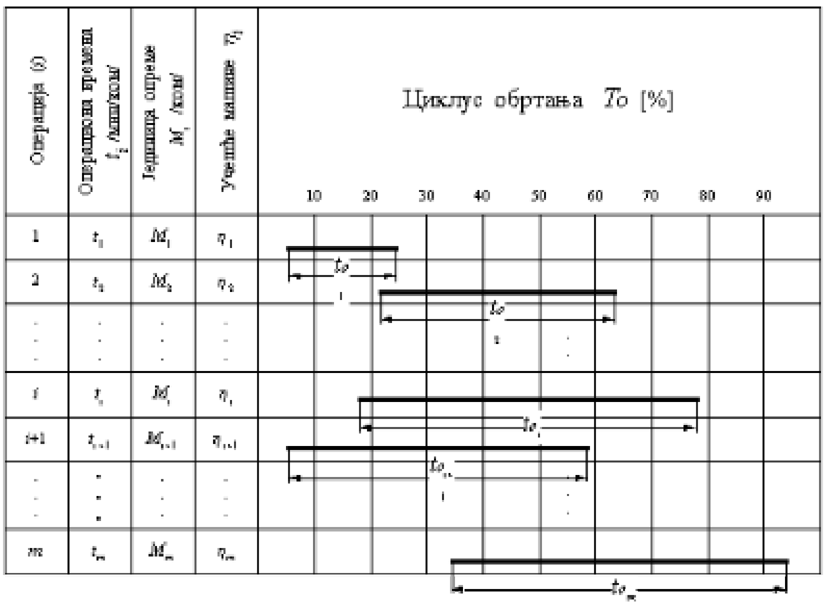
Ove zalihe su značajne kod serijske proizvodnje na linijama, koje rade po odredjenom taktu. Ritam proizvodnje u principu ne sme imati značajnija odstupanja. Kod prekidnih (diskonutinualnih) proizvodnih sistema, količina zaliha nedovršene proizvodnje raste srazmerno vremenu trajanja ciklusa i intenzitetu toka materijala, što za sobom povlači veća potrebna obrtna sredstva i povećava troškove skladištenja.
Kod kontinualnih proizvodnih sistema količina zaliha nedovršene proizvodnje zavisi od broja radnih mesta, od složenosti tehnološkog procesa i ritma rada linije, odnosno, zavisi od dužine proizvodnog ciklusa koji je napred navedenim faktorima odredjen.
Kod kontinualnih proizvodnih sistema se razlikuju sledeće vrste zaliha:

- Tehnološke zalihe q_t, koje omogućavaju nesmetani rad linije, odnosno, početak operacija istovremeno na svim radnim mestima. Nepostojanje (ili nedovoljna količina) ovih zaliha dovode do gubitka u produktivnosti radnih mesta (mašina) odnosno, do zastoja u radu linije. Veličina ovih zaliha je odredjena brojem radnih mesta i brojem pozicija koje se obradjuju na tom radnom mestu.

- Transportne zalihe q_{tr} obuhvataju sve pozicije koje se u posmatranom trenutku nalaze u transportu (izmedju radnih mesta).
- Obrtne zalihe q_0 imaju za cilj sprečavanje zastoja na liniji, a u slučaju da operacije na susednim radnim mestima nisu sinhronizovane.
- Sigurnosne (rezervne) zalihe q_r se uvode radi sprečavanja narušavanja ritma linije i odredjuju se posebno za svaku liniju, a u funkciji karakteristika linije i verovatnoće nastajanja zastoja. Ove zalihe mogu da nadomeste proizvodnju u slučaju pojave škarta, ili u slučaju kvara neke mašine.
- Zalihe podešavanja q_p se planiraju radi eliminisanja zastoja usled podešavanja mašina, zamene alata i sl.
- Zalihe za opravku q_{op} su uslovljene sistemom opravki i održavanja proizvoda.

10.3.1. Planiranje obrtnih i maksimalnih zaliha obrtanja T_0

Grafički prikaz stvaranja nedovršene proizvodnje je dat na slici 136 i 137. Na slici 136 je dat gantogram izrade nekog dela.



Slika 136. Gantogram izrade proizvoda

Na slici 105 prikazan proces stvaranja obrtnih zaliha. U svakom uočenom preseku (z-z) se može izračunati količina nedovršene proizvodnje, u funkciji v remena trajanja operacije i vremena početka rada na pojedinim operacionim ciklusima.

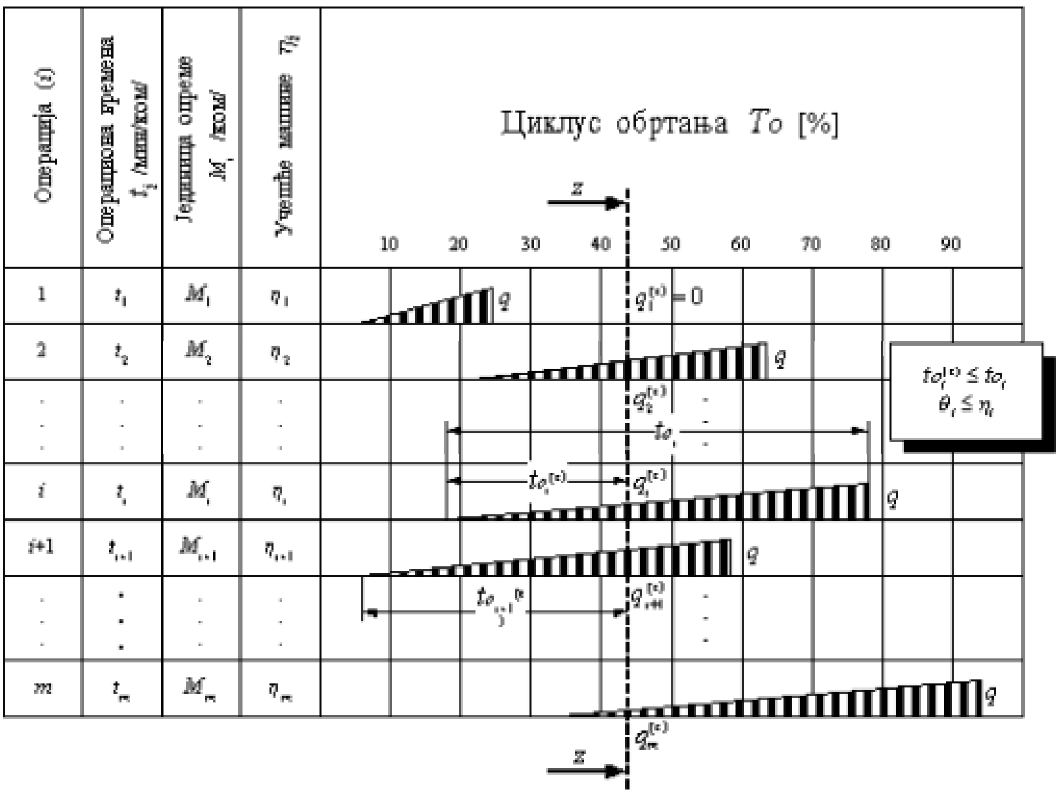
Stepen iskorišćenja radnog vremena na i-tom radnom mestu, pod uslovom da je trajanje ciklusa (trajanje takta) T_0 je:

$$\eta_i = \frac{to_i}{To} \quad (0 < \eta_i \leq 1) \tag{209}$$

Ciklus izrade n-predmeta (proizvoda) na i-tom radnom mestu zavisi od dužine trajanja i-te operacije. Posmatrajući proizvoljan presek (z-z), može se iračunati da su do tok trenutka mašine bile angažovane:

$$to_i^{(z)} = \theta_i \cdot To \leq to_i \tag{210}$$

pri čemu je θ_i – stepen neprekidnog rada mašine Mi do posmatranog trenutka.



Slika 137. Diajgram procesa stvaranja zaliha

Količina proizvoda jedne serije *q,* koja se proizvede u vremenu *to*$_i$, se može izračunati kao:

$$q = \frac{to_i}{t_i} \qquad (211)$$

Na osnovu vremena ciklusa, ili ritma, kao:

$$q = \frac{To}{t} \qquad (212)$$

Količina proizvedenih komada $q^{(z)}$ za operacije *i i* (*i*+1), za presek (*z-z*), se odredjuje kao:

- za i-tu operaciju: $q_i^{(z)} = \frac{to_i^{(z)}}{t_i} = \frac{\theta_i \cdot To}{t_i}$ (kom) (213)
- za (i+1)-u operaciju: $q_{i+1}^{(z)} = \frac{to_{i+1}^{(z)}}{t_{i+1}} = \frac{\theta_{i+1} \cdot To}{t_{i+1}}$ (kom) (214)

U posmatranom trenutku se može uočiti razlika učinka izmedju tekućeg i narednog radnog mesta, kao:

$$q_{i,i+1}^{(z)} = q_i^{(z)} - q_{i+1}^{(z)} \text{ (kom)}$$

Pri ovome mogu nastati sledeće situacije:

$$q_{i,i+1}^{(z)} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0, \text{ što zavisi od odnosa : } t_i \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} t_{i+1}$$

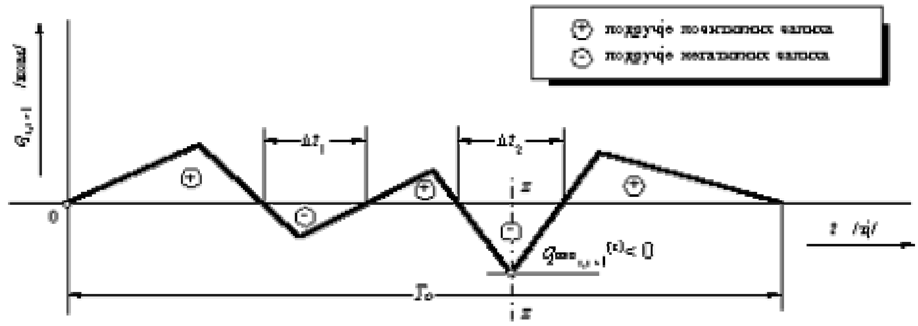
Količina medjuoperacionih zaliha se računa kao:

$$q_{i,i+1}^{(z)} = To \cdot \left(\frac{\theta_i}{t_i} - \frac{\theta_{i+1}}{t_{i+1}}\right) \text{ (kom)} \qquad (215)$$

Količina medjuoperacionih zaliha je funkcija vremena, pošto su $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ promenljive u vremenu je:

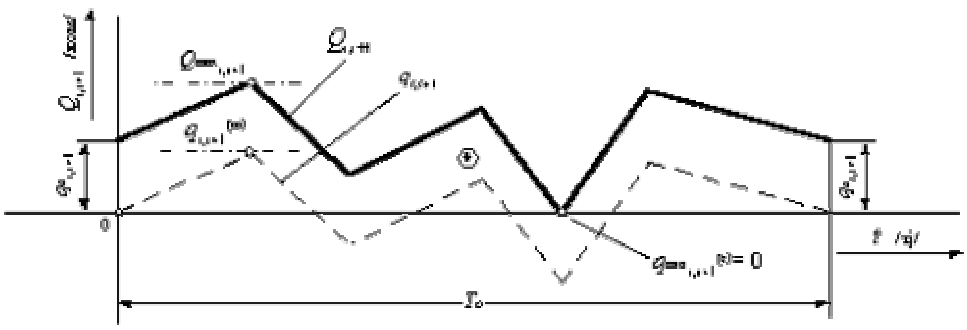
$$q_{i,i+1}^{(z)} = \varphi(\theta_i, \theta_{i+1}) \qquad (216)$$

Stanje ovih zaliha, kao zaliha nedovršene proizvodnje, a pre obezbedjenja obrtnih zaliha uravnoteženja, se može uopšteno prikazati kao na slici 138 u obliku diskontinualne linearne funkcije.



Slika 138. Stanje zaliha nedovršene proizvodnje (bez uravnoteženja)

Kako pri kontinualnoj proizvodnji nisu dozvoljene negativne zalihe, na početku ciklusa rada se pre tekućih operacija postavljaju obrtne zalihe uravnoteženja, pri čemu je potrebno dobiti stanje zaliha nedovršene proizvodnje, kao što je dato na slici 139.



Slika 139. Stanje zaliha nedovršene proizvodnje - sa uravnoteženjem

Superpozicija, koja je ostvarena radi eliminisanja negativnih vrednosti, može se izraziti kao:

$$q\,\min_{i,j+1}^{(z)} < 0 \quad \Rightarrow \quad q\,\min_{i,j+1}^{(z)} = 0 \tag{217}$$

Funkcija zaliha se definiše kao:

$$Q_{i,j+1} = q_{i,j+1} + qo_{i,j+1} \tag{218}$$

Ključni faktor funkcije $Q_{i,j+1}$ je njen konstantni deo $qo_{i,i+1}$, koji predstavlja potrebu za obrtnim zalihama, što znači da se na početku (i+1) operacije „ulaže” odredjena dovoljna količina sirovina, polufabrikata, predmeta rada da bi se izbegla negativna vrednost nedovršene proizvodnje u bilo kom trenutku, odnosno preseku (z-z), odnosno, zastoj, čekanje na predmete rada iz prethodne faze, odnosno operacije. Ova količina se javlja i na kraju procesa, pa se zbog toga i naziva obrtnom zalihom. Vrfednost obrtnih zaliha se odredjuje sa grafika medjuoperacijskih zaliha, pri čemu se uoči presek gde funkcija ima minimalnu vrednost $\left(\left|q\ \min_{i,j+1}^{(z)}\right| = qo_{i,j+1}\right)$. Ovo mesto je karakteristično obzirom na stepen iskkorišćenja θ_i, koji se obeležava sa $\theta_i^{(0)}$, odnosno, za $(i+1)$-u operaciju sa $\theta_{i+1}^{(0)}$. Na osnovu ovoga se može napisati::

$$q\ \min_{i,j+1}^{(z)} = To \cdot \left(\frac{\theta_i^{(0)}}{t_i} - \frac{\theta_{i+1}^{(0)}}{t_{i+1}}\right), \qquad qo_{i,j+1} = \left|To \cdot \left(\frac{\theta_i^{(0)}}{t_i} - \frac{\theta_{i+1}^{(0)}}{t_{i+1}}\right)\right| \tag{219}$$

Pored minimalne vrednosti je važno znati i maksimalnu vrednost funkcije $Q_{i,j+1}$. Karakteristični koeficijenti opterećenja su $\theta_i^{(m)}$ □ $\theta_{i+1}^{(m)}$, pa je maksimalna vrednost ekstrema:

$$Q\max_{i,j+1} = q_{i,j+1}^{(m)} + qo_{i,j+1} = To \cdot \left(\frac{\theta_i^{(m)}}{t_i} - \frac{\theta_{i+1}^{(m)}}{t_{i+1}}\right) + qo_{i,j+1} \tag{220}$$

10.4. Primeri rešenih zadataka

Primer 1.

Fabrici je za kontinualnu proizvodnju potrebno 20.000 kg odredjene sirovine godišnje. Fiksni trošćkovi po svakoj porudžbini iznose 50.000 din., dok troškovi skladištenja i održavanja sirovine u fabrici iznose 1 din/kg/dan.

Odrediti:

a) Optimalnu količinu q^* koju treba da sadrži porudzbina da bi ukupni godišnji troškovi bili minimalni.

b) Za koji iznos se ukupni godišnji troškovi povećavaju ako menadžment preduzeća odluči da nabavlja po 4.000 kg sirovine po porudžbini ?

Rešenje:

Polazni podaci:

$$Q = 20.000\_(kg/god.)$$

$$k_0 = 50.000\_(din/porudzbini)$$

$$k_1 = 1\_(din/kg/dan)$$

a) Optimalna veličina porudžbine

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \bullet k_0 \bullet Q}{k_1 \bullet \tau}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 50.000 \bullet 20.000}{1 \bullet 365}} \approx 2.340\_(kg/porudzbini)$$

b) Godišnji troškovi

$$q = q^* = 2.340\_(kg/porudzbini)$$

$$F(q^*) = k_0 \bullet \frac{Q}{q^*} + k_1 \bullet \frac{q^*}{2} \bullet \tau = 854.400\_(din/god)$$

$$q = 4.000\_(kg/porudzbini)$$

$$F(q) = k_0 \bullet \frac{Q}{q} + k_1 \bullet \frac{q}{2} \bullet \tau = 980.000\_(din/god)$$

$$\Delta F(q) = F(q) - F(q^*) = 980.000 - 854.000 = 125.600\_(din/god.)$$

Primer 2.

Preduzeće koje se bavi montažom mašina, pravi plan nabavke delova za naredno polugodište. Potrebno je nabaviti ukupno 1600 delova. Nabavka se može vršiti svakog dana. Fiksni troškovi po porudžbini su 10 n.j., a troškovi skladištenja po jedinici su 2 n.j. za period od mesec dana.

Odrediti:

a) Optimalnu količinu nabavke, broj porudžbina u toku razmatranog perioda, grafički prikazati proces nabavke i trošenja zaliha

b) Minimalne troškove držanja zaliha u naznačenom periodu.

Rešenje:

Polazni podaci:

$$Q = 1.600\_(kg / periodu.)$$
$$k_0 = 40\_(n.j./ porudzbini)$$
$$k_1 = 1\_(n.j./ kom / me\sec)$$

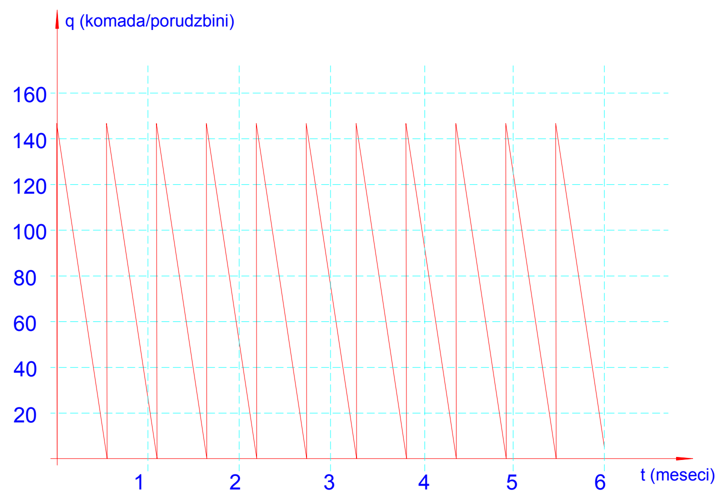
a) Optimalna veličina porudžbine:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \bullet k_0 \bullet Q}{k_1 \bullet \tau}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 40 \bullet 1600}{1 \bullet 6}} \approx 146\_(kom / porudzbini)$$

Broj isporuka u toku razmatranog perioda

$$n = \frac{Q}{q^*} = \frac{1600}{73} = 10{,}95\_(porudzbina / 6\_me\sec i)$$

Grafička predstava procesa nabavke i trošenja je data na slici 140.



Slika 140. Proces nabavke i trošenja zaliha

b) Minimalni troškovi držanja zaliha u naznačenom periodu (6 meseci)

$$q = q^* = 146\_(kom / porudzbini)$$

$$F(q^*) = k_0 \bullet \frac{Q}{q^*} + k_1 \bullet \frac{q^*}{2} \bullet \tau = 876\_(n.j./6\_me\sec i)$$

Primer 3.

Ukupna potražnja za razmatranim proizvodom je 44.000 komada na godišnjem nivou. Fiksni troškovi za realizaciju proizvodne serije su 8300 h.j/seriji. Jedinični troškovi održavanja zaliha (proizvoda) su 80 (n.j./kom/mes). Troškovi naknadne nabavke su 320 (n.j/kom/mes).

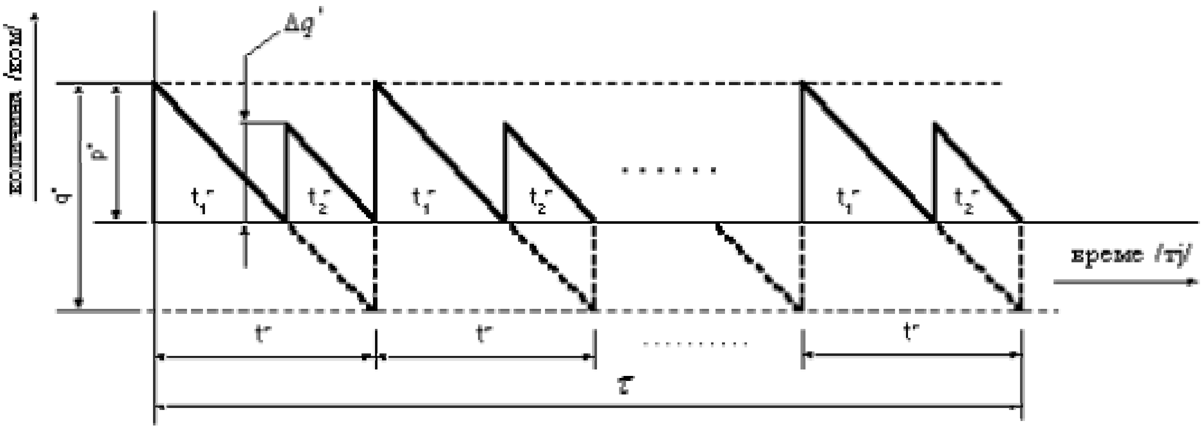
Za slučaj da je potražnja proizvoda veća od redovnog nivoa zaliha odrediti optimalni obim q^* potražnje proizvoda u toku vremenskog perioda *t*, kao i optimalni obim zaliha p^* u istom vremenskom intervalu *t*.

Rešenje:

Polazni podaci su:

$$Q = 44.000\_(kom / god.)$$
$$\tau = 1\_god.$$
$$k_0 = 8.300\_(n.j./seriji)$$
$$k_1 = 80\_(n.j / kom / mes)$$
$$k_2 = 320\_(n.j / kom / mes.)$$

Grafička predstava problema je data na slici 141.



Slika 141. Model optimalnih zaliha sa redovnom i interventnom nabavkom

$$q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot k_0}{\tau \cdot k_1}} \cdot \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44000 \cdot 8300}{12 \cdot 80}} \cdot \sqrt{\frac{80 + 320}{320}} = 975{,}2 \text{ (kom/seriji)}$$

$$p^* = \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot k_0}{\tau \cdot k_1}} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1 + k_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 44000 \cdot 8300}{12 \cdot 80}} \cdot \sqrt{\frac{320}{80 + 320}} = 780{,}2 \text{ (kom/seriji)}$$

Minimalna vrednost funkcije cilja, odnosno, minimalna vrenost troškova na godišnjem nivou je:

$$\min F(q,p) = \sqrt{2 \cdot Q \cdot k_0 \cdot k_1 \cdot \tau} \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1 + k_2}} = \sqrt{2 \cdot 44000 \cdot 8300 \cdot 80 \cdot 12} \cdot \sqrt{\frac{320}{80 + 320}} = 748964{,}08 \text{ (n.j.)}$$

Optimalno vreme proizvodnog ciklusa je :

$$t^* = \frac{\tau}{Q} \cdot q^* = \frac{12}{44000} \cdot 975{,}2 = 0{,}266 \text{ (mes)} \approx 8 \text{ (dan)}$$

Vremena t_1^* i t_2^* su:

$$t_1^* = \frac{p^*}{q^*} \cdot t^* = \frac{780{,}2}{975{,}2} \cdot 0{,}266 = 0{,}213 \text{ (mes.)} \approx 6 \text{ (dan) i } 9 \text{ (h)}$$

$$t_2^* = t^* - t_1^* = 0{,}266 - 0{,}213 = 0{,}053 \text{ (mes.)} \approx 1 \text{ (dan) i } 15 \text{ (h).}$$

Vrednost nedostajućih zaliha na kraju razmatranih perioda t je:

$$\Delta q^* = q^* - p^* = 975{,}2 - 780{,}2 = 195 \text{ (kom)}$$

Optimalni broj ciklusa u toku godine je:

$$n^* = \frac{\tau}{t^*} = \frac{12}{0{,}266} = 45{,}1 \text{ (ciklusa/godini)}$$

LITERATURA

J. Petrić; Operaciona istraživanja, Knjiga I i Knjiga II, Naučna knjiga, Beograd

J. Petrić, Operaciona istraživanja – Zbirka rešenih zadataka, Knjiga I i Knjiga II, Naučna knjiga, Beograd

D. Lipovac i dr., Modeli optimizacije, ICIM, Kruševac, 2000.

D. Stojanović, Matematičke metode u ekonomiji, Savremena administracija, Beograd, 1982.

D. Stojanović, Zbirka rešenih zadataka iz matematičkih metoda i modela

B. Maynard, Industrijski inženjering, Knjiga I, II, III i IV, Privredni pregled, Beograd, 1984.

O. Todorović, Operaciona istraživanja, Prosveta, Niš, 1999.

J. Tomić, Zbirka zadataka iz operacionih istraživanja, Privredna štampa, Beograd, 1982.

Letić, D.: Operaciona istraživanja, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2001. 2003.

Dj. Zrnić, Simulacija procesa unutrašnjeg transporta, Mašinski fakultet, Beograd, 1985.

S. Vukadinović, Masovno opsluživanje, Naučna Knjiga, Beograd, 1988.

B. Radenković, M. Stanojević, A. Marković; Računarska simulacija, FON, Beograd, 1999.