

ТЕОРИЈА СИСТЕМА

(збирка решених задатака)

БОР, 2008.

САДРЖАЈ:

1. ВРЕМЕНСКЕ ФУНКЦИЈЕ УЛАЗНИХ ВЕЛИЧИНА	1
1.1 Типичне промене улазних величина	1
2. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА (оперативни рачун)	6
2.1. Диференцијална једначина понашања	6
2.2. Основе Лапласове трансформације	6
2.2.1. Директна Лапласова трансформација	7
2.2.2. Инверзна Лапласова трансформација.....	17
2.2.3. Решавање диференцијалних једначина применом Лапласових трансформација.....	30
3. ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА СИСТЕМА	47
3.1. Одређивање преносне функције система	47
4. ВРЕМЕНСКИ ОДЗИВИ СИСТЕМА	55
4.1. Закон суперпозиције	55
4.2. Одређивање карактеристичних одзива система	57
5. ПРИКАЗИВАЊЕ СИСТЕМА	68
4.1. Структурни дијаграм система	68
5.2. Блок дијаграм система	68
5.2.1. Еквивалентни дијаграми основних спрега.....	68
5.2.2. Алгебра блок дијаграма-одређивање функције спрегнутог преноса	73
6. МОДЕЛ СИСТЕМА У ПРОСТОРУ СТАЊА.....	96
6.2. Одређивање векторске једначине стања и векторске једначине излаза за модел система у простору стања.....	100
7. СТАБИЛНОСТ СИСТЕМА	127
7.1. Хурвицов алгебарски критеријум.....	127
7.2. Роутов алгебарски критеријум.....	128
7.3. Најквистов критеријум.....	128
7.4. Бодев критеријум.....	129
7.5. Алгебарско одређивање стабилности система	131
ЛИТЕРАТУРА	140
ДОДАТАК	141

1. ВРЕМЕНСКЕ ФУНКЦИЈЕ УЛАЗНИХ ВЕЛИЧИНА

1.1 Типичне промене улазних величина

Одзив система је једна од динамичких карактеристика система. Он је резултат рада система и описује тај рад. Односно, одзив система је резултат природе система, дејства улаза и почетних услова (почетног стања). Он је спољна реакција система на ова дејства.

Детаљно објашњење одређивања карактеристичних излаза тј. временских одзива система биће показано у поглављу 4.

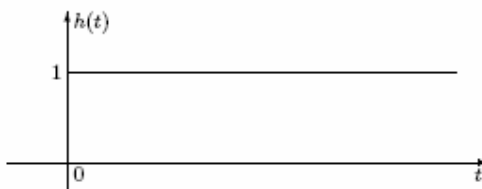
За упознавање, утврђивање и анализу одзива линеарних система довољно је проучити њихове одзиве на одређене, типичне промене улаза. Три најчешће коришћене улазне величине за динамичку анализу система су Хевисајдова или одскочна (у Matlab-у step), Диракова или импулсна (impulse) и синусна функција (sin). За све типичне промене улазних величина је заједничко да су оне до почетног тренутка биле једнаке нули. За почетни тренутак се усваја $t_0 = 0$, што је оправдано пошто се проучавају само линеарни стационарни системи чије динамичко понашање не зависи од избора почетног тренутка.

- $h(t)$ -јединична одскочна функција (Хевисајдова функција)

Ова функција је дефинисана следећим изразом:

$$h(t) \begin{cases} = 0, & t < 0, \\ \in [0,1], & t = 0, \\ = 1, & t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Њен график је приказан на слици 1.1.



Слика 1.1. График јединичне одскочне функције (Хевисајдова функција)

Одзив система на овакав улаз, Хевисајдову функцију, назива се **јединични одскочни одзив** или **прелазна функција** и обележава се са $g(t)$:

$$x_u(t) = h(t) \Rightarrow x_i(t) = g(t).$$

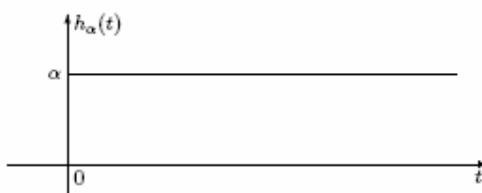
Хевисајдова функција је врло значајна за одређивање показатеља квалитета прелазног процеса као стационарних особина система (позиционог појачања, позиционе статичке гршке,...).

- $h_\alpha(t)$ -одскочна функција

Ова функција је дефинисана следећим изразом:

$$h_\alpha(t) \begin{cases} = 0, & t < 0, \\ \in [0, \alpha], & t = 0, \\ = \alpha, & t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Њен график је приказан на слици 1.2.



Слика 1.2. График одскачне функције

Одзив система на одскачну функцију се назива **одскачни одзив** и обележава се са $g_\alpha(t)$:

$$x_u(t) = h_\alpha(t) = \alpha h(t) \Rightarrow x_i(t) = g_\alpha(t).$$

Само за линеарне системе важи:

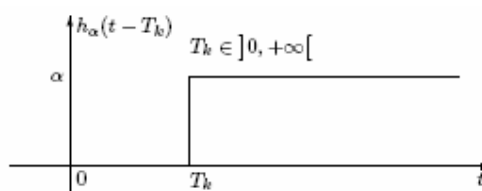
$$g_\alpha(t) = \alpha g(t).$$

- $h_\alpha(t - T_k)$ -одскачна функција са кашњењем

Ова функција је дефинисан изразом:

$$h_\alpha(t - T_k) = \begin{cases} = 0, & t < T_k, \\ \in [0, \alpha], & t = T_k, \\ = \alpha, & t \in]T_k, +\infty[. \end{cases}$$

Њен график је дат на слици 1.3.

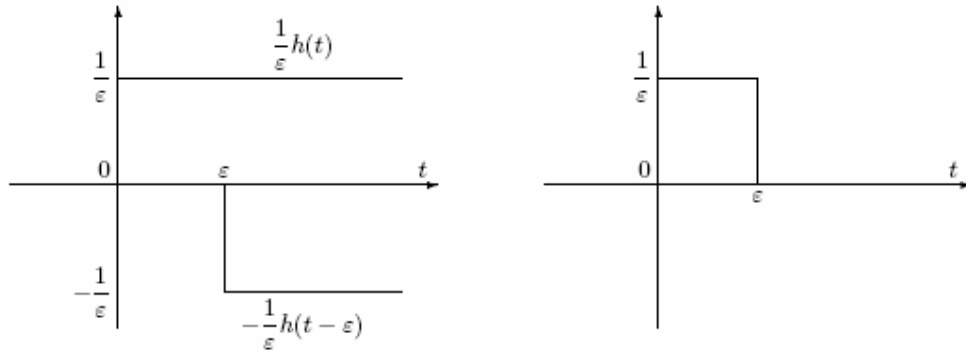


Слика 1.3. График одскачне функције са кашњењем

- $\delta(t)$ -јединична импулсна функција (Диракова функција)

Посматрају се две функције: $\frac{1}{\varepsilon}h(t)$ и $\frac{1}{\varepsilon}h(t - \varepsilon)$, слика 1.4. Њихов алгебарски збир је:

$$\frac{h(t) - h(t - \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

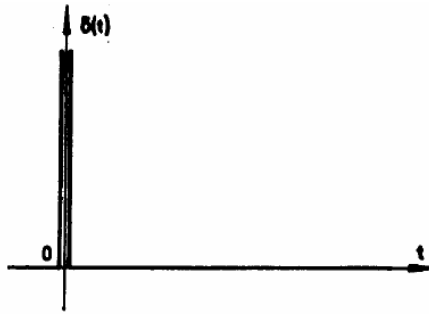


Слика 1.4. График функција $\frac{1}{\varepsilon}h(t)$ и $\frac{1}{\varepsilon}h(t-\varepsilon)$ и њихов алгебарски збир

А јединична импулсна функција, Диракова функција, је дефинисана релацијом:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{h(t) - h(t-\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Геометријска интерпретација Диракове функције приказана је на десној слици слике 1.4. С обзиром да се ради о граничној вредности када се ε бесконачно смањује, онда пулс, правоугаоник страница ε и $\frac{1}{\varepsilon}$ постаје импулс слика 1.5.



Слика 1.5. График функције јединичног импулса

Површина тог импулса је, као и површина пулса, $P = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$, па се зато ова функција која је у нули бесконачног интензитета (не јединичног) назива **јединична импулсна функција**. У техници дефинише удар на уласку у систем.

Самим тим Диракова функција има особину да је:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1, \quad \delta(0) = +\infty, \quad \delta(t) = 0, \forall (t \neq 0) \in]-\infty, +\infty[.$$

Одзив система на Диракову функцију је такође типичан (пошто је улаз типичан и одзив је типичан) и назива се **јединични импулсни одзив** и обележава се са $i(t)$.

$$x_u(t) = \delta(t) \Rightarrow x_i(t) = i(t).$$

- **n(t)-нагибна функција**

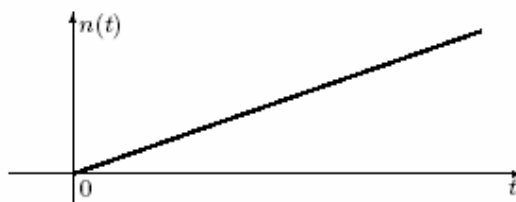
Аналитички опис нагибне функције, је:

$$n(t) = \begin{cases} 0, & t \in]-\infty, 0], \\ \alpha t, & t \in [0, +\infty[, \alpha \in]-\infty, +\infty[, \end{cases}$$

што може да се напише у краћем облику:

$$n(t) = \alpha t h(t).$$

Функција αt се множи са функцијом $h(t)$ да би нагибна функција $n(t)$ била једнака нули за $\forall t < 0$. График нагибне функције $n(t)$ је приказан на слици 1.6.



Слика 1.6. График нагибне функције

Одзив система на нагибни улаз је **нагибни одзив**.

- **$e(t)$ -експоненцијална функција**

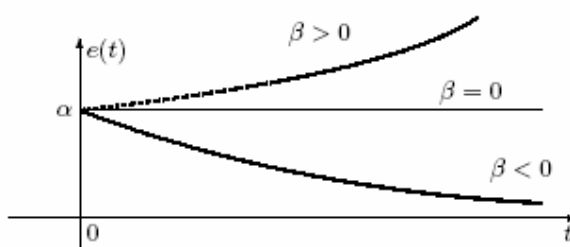
Експоненцијална функција, означена са $e(t)$, је дефинисана изразом:

$$e(t) \begin{cases} = 0, & t \in]-\infty, 0[, \\ \in [0, \alpha], & t = 0, \\ = \alpha e^{\beta t}, & t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Ово може краће да се напише са:

$$e(t) = \alpha e^{\beta t} h(t).$$

График експоненцијалне функције је приказан на слици 1.7. за $\alpha \in]0, +\infty[$.



Слика 1.7. График експоненцијалне функције

Одзив система на експоненцијалну промену улаза се назива **експоненцијални одзив**.

- **$s(t)$ -синусна функција**

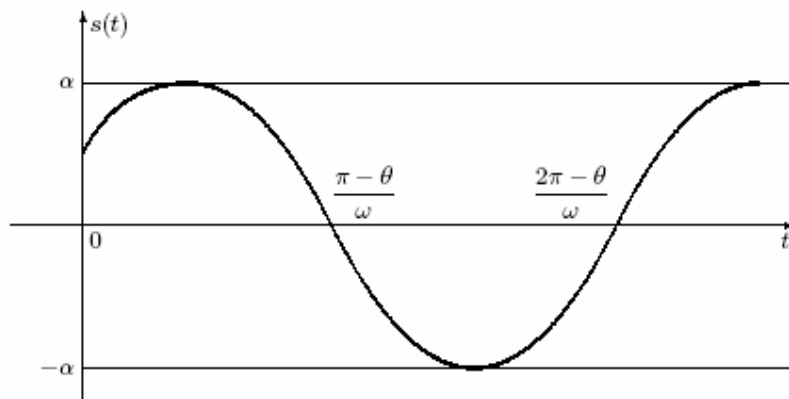
Синусна функција, означена са $s(t)$, је дефинисана изразом:

$$s(t) \begin{cases} = 0, & t \in]-\infty, 0[, \\ \in [0, \alpha \sin \theta], & t = 0, \\ = \alpha \sin(\omega t + \theta), & t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Што може да се сажме у облик:

$$s(t) = \alpha h(t) \sin(\omega t + \theta),$$

а њен график је приказан на слици 1.8.



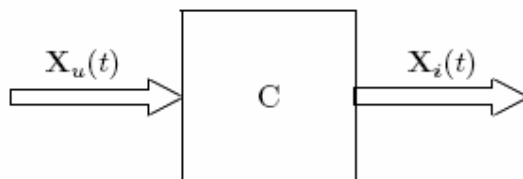
Слика 1.8. График синусне функције

Одзив система на синусну промену улазне величине се назива **синусни одзив**.

2. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА (оперативни рачун)

2.1. Диференцијална једначина понашања

Посматра се линеарни систем на слици 2.1., чије се динамичко понашање може описати диференцијалним једначинама различитог реда. Међутим, за проучавање динамичких особина система довољно је познавати диференцијалну једначину најнижег реда. Исто важи и за проучавање одзива система на познату промену улазне величине, а при познатим свим почетним условима.



Слика 2.1. Вишеструко преносни систем

Дефиниција: Диференцијална једначина најнижег реда која потпуно динамички описује систем, тј. која омогућава да се одреде вредности излазне величине система и свих њених извода на интервалу $[t_0, +\infty)$ за сваки почетни тренутак t_0 , $-\infty < t_0 < +\infty$, а при познатим почетним вредностима (у тренутку t_0) свих извода излазне величине и при познатим вредностима улазне величине на интервалу $[t_0, +\infty)$, је **диференцијална једначина понашања тог система**, или краће: **једначина понашања система**.

Уочимо да познавање промена вредности величина x_i и x_u омогућава да се одреде сви њихови изводи. Зато је систем потпуно динамички описан једначином понашања пошто се за сваку дефинисану промену улазне величине x_u и за дефинисане почетне услове може њеним решавањем одредити промена излазне величине x_i тог система.

У даљем излагању, осим ако се другачије не нагласи, ће се проучавати системи чија је једначина понашања облика:

$$a_n x_i^{(n)}(t) + a_{n-1} x_i^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x_i(t) = b_0 x_u(t) + \dots + b_{m-1} x_u^{(m-1)}(t) + b_m x_u^{(m)}(t), \quad n \geq m.$$

У овој диференцијалној једначини понашања се јављају величине x_i и x_u и њихови изводи.

За одређивање одзива система потребно је решити диференцијалну једначину понашања, којом је тај систем описан. Решавање линеарних нехомогених диференцијалних једначина са константним коефицијентима, које описују системе који се овде проучавају, може једноставно да се изведе применом Лапласових трансформација.

2.2. Основе Лапласове трансформације

Лапласова трансформација омогућава једноставан прелазак из временског домена у комплексни домен, у коме се функције попут синусне, косинусне, експоненцијалне, ..., преводе у алгебарске функције комплексне променљиве (s). Операције као што су диференцирање и интеграирање замењују се алгебарским операцијама у комплексној равни. То значи да се диференцијалне једначине преводе у алгебарске једначине комплексне променљиве (s). Решења тих једначина у функцији променљиве (s) лако се преводе у временски домен (**инверзна Лапласова трансформација**), коришћењем

таблица Лапласове трансформације или одређивањем резидијума и разлагањем решења на елементарне табличне функције.

Осим тога, примена Лапласове трансформације на диференцијалну једначину понашања доводи до појма преносне функције система, који има фундаментални значај јер омогућава да се анализа динамичког понашања система изврши у комплексном и учестаносном домену.

Лапласова трансформација функције $f(t)$ дефинисана је изразом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt.$$

Инверзна Лапласова трансформација дефинисана је изразом:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s) \cdot e^{st} ds, \quad t > 0.$$

где су:

- $\mathcal{L}$ -оператор Лапласове трансформације;
- $\mathcal{L}^{-1}$ -оператор инверзне Лапласове трансформације;
- s - комплексна променљива Лапласове трансформације;
- $f(t)$ - оригинал функције $F(s)$;
- $F(s)$ - комплексни лик функције $f(t)$;

За одређивање Лапласових, односно инверзних Лапласових трансформација, у пракси се користе табеле са готовим изразима за одређене функције. Табела 1. додатка садржи Лапласове трансформације неких карактеристичних функција, а у табели 2. наведене су теореме и правила.

2.2.1. Директна Лапласова трансформација (примери решених задатака)

Задатак 1.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = t^2 \cdot e^{-4t}.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 \cdot e^{-4t}]$$

Решење директне Лапласове трансформације своди се проналажење релевантне промене задате функције, из временског у фреквентни домен, које су дате у табели 1.(табела 1. налази се у додатку).

У табели 1., под редним бројем 10., налази се општи облик функције и њен комплексни лик:

$$\mathcal{L}[t^n \cdot e^{-at}] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}.$$

За дату функцију, у претходној једначини треба заменити $n = 2$; $a = 4$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 \cdot e^{-4t}] = \frac{2!}{(s+4)^{2+1}} = \frac{2 \cdot 1}{(s+4)^3} = \frac{2}{(s+4)^3}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
(>> syms t
>> f = t^2 * exp(-4 * t)
laplace(f)
returns)
```

Задатак 2.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = 4t^2 + \cos 3t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[4t^2 + \cos 3t].$$

На основу теореме линеарности наведене у табели2., под редним бројем 1. (табела 2. налази се у додатку), комплексни лик задате функције може се изразити на следећи начин:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[4 \cdot t^2 + \cos 3t] = \mathcal{L}[4 \cdot t^2] + \mathcal{L}[\cos 3t] = 4 \cdot \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}[\cos 3t].$$

За сваку од карактеристичних функција може се наћи комплексни лик.

На основу табеле1., редни број 6., следи:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

заменом за прву карактеристичну једначину где је $n = 2$, добија се:

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$$

На основу табеле 1., редни број 12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

заменом за другу карактеристичну једначину где је $\omega = 3$, добија се:

$$\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2 + 3^2} = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 + \cos 3t] = 4 \cdot \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2 + 9} = \frac{8 \cdot (s^2 + 9) + s^4}{s^3(s^2 + 9)} = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)},$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[4t^2 + \cos 3t] = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
(>> f = 4 * t^2 + cos(3 * t)
laplace(f)
returns)
```

Задатак 3.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = e^{-4t} + 4 \cdot \cos 4t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t} + 4 \cdot \cos 4t]$$

На основу теореме линеарности наведене у табели2., под редним бројем 1., комплексни лик задате функције може се изразити на следећи начин:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t} + 4 \cdot \cos 4t] = \mathcal{L}[e^{-4t}] + \mathcal{L}[4 \cdot \cos 4t] = \mathcal{L}[e^{-4t}] + 4 \cdot \mathcal{L}[\cos 4t].$$

За сваку од карактеристичних функција може се наћи комплексни лик.

На основу табеле1., редни број 7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{\pm at}] = \frac{1}{s \mp a},$$

заменом за прву карактеристичну једначину где је $a = 4$, добија се:

$$\mathcal{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s + 4}.$$

На основу табеле 1., редни број 12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

заменом за другу карактеристичну једначину где је $\omega = 4$, добија се:

$$\mathcal{L}[\cos 4t] = \frac{s}{s^2 + 4^2} = \frac{s}{s^2 + 16}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[e^{-4t} + 4 \cdot \cos 4t] = \frac{1}{s + 4} + 4 \cdot \frac{s}{s^2 + 16} = \frac{s^2 + 16 + 4s \cdot (s + 4)}{(s + 4)(s^2 + 16)} = \\ &= \frac{s^2 + 16 + 4 \cdot s^2 + 16s}{(s + 4)(s^2 + 16)} = \frac{5s^2 + 16s + 16}{(s + 4)(s^2 + 16)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[e^{-4t} + 4 \cdot \cos 4t] = \frac{5s^2 + 16s + 16}{(s + 4)(s^2 + 16)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
( >> f = exp(-4 * t) + 4 * cos(4 * t) )
  laplace(f)
  returns
```

Задатак 4.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = \frac{1}{9}(1 - e^{-3t} - 3t \cdot e^{-3t}).$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{9}(1 - e^{-3t} - 3t \cdot e^{-3t})\right]$$

За ову карактеристичну функцију комплексни лик се може наћи на два начина: први начин је примена теореме линеарности (табела 2., под редним бројем 1.) или други начин, применом Лапласове трансформације из табеле 1., под редним бројем 20.:

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - at \cdot e^{-at})\right] = \frac{1}{s(s+a)^2}.$$

За дату функцију, у претходној једначини треба заменити $a = 3$:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{9}(1 - e^{-3t} - 3t \cdot e^{-3t})\right] = \frac{1}{s(s+3)^2}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
( >> f = 1/9 * (1 - exp(-3 * t) - 3 * t * exp(-3 * t)) )
  laplace(f)
  returns
```

Задатак 5.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = t \cdot e^{-2t} + \cos 2t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \cdot e^{-2t} + \cos 2t].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t \cdot e^{-2t} + \cos 2t] = \mathcal{L}[t \cdot e^{-2t}] + \mathcal{L}[\cos 2t].$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу табеле 1., под редним бројем 9., следи:

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-at}] = \frac{1}{(s+a)^2},$$

заменом за прву карактеристичну једначину где је $a = 2$, добија се:

$$\mathcal{L}[t \cdot e^{-2t}] = \frac{1}{(s+2)^2}.$$

На основу Т.1.-12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 2^2} = \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t \cdot e^{-2t} + \cos 2t] = \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{s^2 + 4 + s(s+2)^2}{(s+2)^2 \cdot (s^2 + 4)} = \\ &= \frac{s^2 + 4 + s(s^2 + 4s + 4)}{(s+2)^2 \cdot (s^2 + 4)} = \frac{s^2 + 4 + s^3 + 4s^2 + 4s}{(s+2)^2 \cdot (s^2 + 4)} = \frac{s^3 + 5s^2 + 4s + 4}{(s+2)^2 \cdot (s^2 + 4)}, \\ F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t \cdot e^{-2t} + \cos 2t] = \frac{s^3 + 5s^2 + 4s + 4}{(s+2)^2 \cdot (s^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
(>> f = t * exp(-2 * t) + cos(2 * t)
laplace(f)
returns)
```

Задатак 6.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = 1 + e^{-3t} - \frac{1}{3} \sin 3t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1 + e^{-3t} - \frac{1}{3} \sin 3t].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[1 + e^{-3t} - \frac{1}{3} \sin 3t] = \mathcal{L}[h(t)] + \mathcal{L}[e^{-3t}] - \mathcal{L}[\frac{1}{3} \cdot \sin 3t] = \\ &= \mathcal{L}[h(t)] + \mathcal{L}[e^{-3t}] - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}[\sin 3t]. \end{aligned}$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу Т.1.-3., следи:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}.$$

На основу Т.1.-7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}.$$

На основу Т.1.-11., следи:

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

заменом за трећу карактеристичну једначину где је $\omega = 3$, добија се:

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}\left[1 + e^{-3t} - \frac{1}{3}\sin 3t\right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{s^2 + 9} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s^2 + 9} = \\ &= \frac{(s^2 + 9)(s+3) + s(s^2 + 9) - s(s+3)}{s(s+3)(s^2 + 9)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 9s + 27 + s^3 + 9s - s^2 - 3s}{s(s+3)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{2s^3 + 2s^2 + 15s + 27}{s(s+3)(s^2 + 9)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[1 + e^{-3t} - \frac{1}{3}\sin 3t\right] = \frac{2s^3 + 2s^2 + 15s + 27}{s(s+3)(s^2 + 9)}$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = 1 + \exp(-3 * t) - 1/3 * \sin(3 * t) \\ \text{laplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 7.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-2t}) + \cos 3t.$$

Решење:

Почетну функцију можемо написати и у облику:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 3t$$

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 3t\right].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 3t\right] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\right] - \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} \cdot e^{-2t}\right] + \mathcal{L}[\cos 3t] = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[h(t)] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{-2t}] + \mathcal{L}[\cos 3t]. \end{aligned}$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу Т.1.-3., следи:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}.$$

На основу Т.1.-7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}.$$

На основу Т.1.-12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2 + 3^2} = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 3t\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{s}{s^2 + 9} = \\ &= \frac{(s+2)(s^2 + 9) - s(s^2 + 9) + 2s \cdot s(s+2)}{2s(s+2)(s^2 + 9)} = \frac{s^3 + 9s + 2s^2 + 18 - s^3 - 9s + 2s^3 + 4s^2}{2s(s+2)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{2s^3 + 6s^2 + 18}{2s(s+2)(s^2 + 9)} = \frac{s^3 + 3s^2 + 9}{s(s+2)(s^2 + 9)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \cos 3t\right] = \frac{s^3 + 3s^2 + 9}{s(s+2)(s^2 + 9)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = 1/2 * (1 - \exp(-2 * t) + \cos(3 * t)) \\ \text{laplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 8.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = 1 + \frac{1}{6}t^2 - \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t}.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[1 + \frac{1}{6}t^2 - \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t}\right].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[1 + \frac{1}{6}t^2 - \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t}\right] = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{6} \cdot t^2\right] - \mathcal{L}[\cos 3t] + \mathcal{L}\left[\frac{1}{3} \cdot e^{2t}\right] = \\ &= \mathcal{L}[h(t)] + \frac{1}{6} \cdot \mathcal{L}[t^2] - \mathcal{L}[\cos 3t] + \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}[e^{2t}]. \end{aligned}$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу Т.1.-3., следи:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}.$$

На основу Т.1.-6., следи:

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$$

На основу Т.1.-12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos 3t] = \frac{s}{s^2 + 3^2} = \frac{s}{s^2 + 9}.$$

На основу Т.1.-7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s - 2}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[1 + \frac{1}{6}t^2 - \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t}\right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{s^3} - \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s - 2} = \\ &= \frac{3s^2(s - 2)(s^2 + 9) + (s - 2)(s^2 + 9) - 3s^3 \cdot s(s - 2) + s^3(s^2 + 9)}{3s^3(s - 2)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{3s^5 + 27s^3 - 6s^4 - 54s^2 + s^3 + 9s - 2s^2 - 18 - 3s^5 + 6s^4 + s^5 + 9s^3}{3s^3(s - 2)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{s^5 + 37s^3 - 56s^2 + 9s - 18}{3s^3(s - 2)(s^2 + 9)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[1 + \frac{1}{6}t^2 - \cos 3t + \frac{1}{3}e^{2t}\right] = \frac{s^5 + 37s^3 - 56s^2 + 9s - 18}{3s^3(s - 2)(s^2 + 9)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
( >> f = 1 + 1/6 * t^2 - cos(3 * t) + 1/3 * exp(2 * t) )
  laplace(f)
  returns
```

Задатак 9.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = t^3 + e^{-3t} + 3 \sin 3t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^3 + e^{-3t} + 3 \sin 3t].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t^3 + e^{-3t} + 3 \sin 3t] = \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[e^{-3t}] + \mathcal{L}[3 \sin 3t] = \\ &= \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[e^{-3t}] + 3 \cdot \mathcal{L}[\sin 3t]. \end{aligned}$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу Т.1.-6., следи:

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{6}{s^4}.$$

На основу Т.1.-7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{s+3}.$$

На основу Т.1.-11., следи:

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Заменом добијених комплексних ликова у почетну једначину добија се:

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t^3 + e^{-3t} + 3 \sin 3t] = \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s+3} + 3 \cdot \frac{3}{s^2 + 9} = \\ &= \frac{6(s+3)(s^2 + 9) + s^4(s^2 + 9) + 9s^4(s+3)}{s^4(s+3)(s^2 + 9)} = \frac{6s^3 + 54s + 18s^2 + 162 + s^6 + 9s^4 + 9s^5 + 27s^4}{s^4(s+3)(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{s^6 + 9s^5 + 36s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 54s + 162}{s^4(s+3)(s^2 + 9)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^3 + e^{-3t} + 3 \sin 3t] = \frac{s^6 + 9s^5 + 36s^4 + 6s^3 + 18s^2 + 54s + 162}{s^4(s+3)(s^2 + 9)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
( >> f = t^3 + exp(-3 * t) + 3 * sin(3 * t) )
  laplace(f)
  returns
```

Задатак 10.

Одредити комплексни лик функције:

$$f(t) = t^2 + \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t.$$

Решење:

Комплексни лик неке функције која се мења у временском домену, добија се директном Лапласовом трансформацијом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 + \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t].$$

На основу табеле 2., редни број 1., следи:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 + \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t] = \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}[\sin 2t] + \mathcal{L}[e^{-2t} \cos 2t].$$

За сваку од карактеристичних функција тражи се комплексни лик.

На основу Т.1.-6., следи:

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$$

На основу Т.1.-11., следи:

$$\mathcal{L}[\sin 2t] = \frac{2}{s^2 + 2^2} = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

На основу табеле 1., редни број 14., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2},$$

заменом за трећу карактеристичну једначину где је $a = 2$, $\omega = 2$, добија се:

$$\mathcal{L}[e^{-2t} \cos 2t] = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 2^2} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 4 + 4} = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 8}.$$

$$\begin{aligned} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[t^2 + \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t] = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2 + 4} + \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 8} = \\ &= \frac{2((s^2 + 4)(s^2 + 4s + 8) + 2s^3(s^2 + 4s + 8) + s^3(s + 2)(s^2 + 4))}{s^3(s^2 + 4)(s^2 + 4s + 8)} = \\ &= \frac{2s^4 + 8s^3 + 16s^2 + 8s^2 + 32s + 64 + 2s^5 + 8s^4 + 16s^3 + s^6 + 4s^4 + 2s^5 + 8s^3}{s^3(s^2 + 4)(s^2 + 4s + 8)} = \\ &= \frac{s^6 + 4s^5 + 14s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 32s + 64}{s^3(s^2 + 4)(s^2 + 4s + 8)}, \end{aligned}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[t^2 + \sin 2t + e^{-2t} \cos 2t] = \frac{s^6 + 4s^5 + 14s^4 + 32s^3 + 24s^2 + 32s + 64}{s^3(s^2 + 4)(s^2 + 4s + 8)}.$$

Добијени израз представља комплексни лик задате функције.

Matlab code :

```
(>> f = t^2 + sin(2 * t) + exp(-2 * t) * cos(2 * t)
laplace(f)
returns)
```

2.2.2. Инверзна Лапласова трансформација (примери решених задатака)

Задатак 1.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)}.$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} =$$

$$F(s) = \frac{K_1(s+2) + K_2s}{s(s+2)} = \frac{K_1s + 2K_1 + K_2s}{s(s+2)} = \frac{(K_1 + K_2)s + 2K_1}{s(s+2)}.$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s + 2K_1}{s(s+2)} = \frac{s-2}{s(s+2)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добијају се хомогене или нехомогене линеарне једначине непознате $(K_i); i=1,2,\dots,n$. Решења система ових једначина се добијају на основу познатих метода (метода смене или Крамерова правила):

$$\text{Уз } s: K_1 + K_2 = 1,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 2K_1 = -2.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 + K_2 = 1 \\ 2K_1 = -2 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K_1 = -1 \\ -1 + K_2 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K_1 = -1 \\ K_2 = 2 \end{array} \right|.$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s+2}.$$

У табели 2., под редним бројем 1., наведена је теорема линеарности на основу које се комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{s-2}{s(s+2)} = \frac{-1}{s} + \frac{2}{s+2} = H(s) + R(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација. Оригинал функције $F(s)$ изражава се збиром функција које се добијају инверзном Лапласовом трансформацијом функција $H(s)$ и $R(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = h(t) + r(t).$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$ тражи се инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = -1.$$

За другу карактеристичну функцију $R(s)$ тражи се такође инверзна Лапласова трансформација:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 2, \text{ следи: } r(t) = 2 \cdot e^{-2t}.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $h(t)$ и $r(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t) + r(t) = -1 + 2 \cdot e^{-2t}.$$

Matlab code :

```
(>> sysm    s
>> f = (s - 2) / s / (s + 2)
ilaplace(f)
returns)
```

Задатак 2.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s \cdot (s+3)}.$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s(s+3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3},$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+3} = \frac{K_1(s+3) + K_2 \cdot s}{s(s+3)} = \frac{K_1s + 3K_1 + K_2s}{s(s+3)} = \frac{(K_1 + K_2)s + 3K_1}{s(s+3)}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s + 3K_1}{s(s+3)} = \frac{2s+1}{s(s+3)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s: K_1 + K_2 = 2,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 3K_1 = 1.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 + K_2 = 2 \\ 3K_1 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} + K_2 = 2 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{3} \\ K_2 = \frac{5}{3} \end{array}.$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+3}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s(s+3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+3} = H(s) + R(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = h(t) + r(t).$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = \frac{1}{3}.$$

За другу карактеристичну функцију $R(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s+3}\right] = \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 3, \text{ следи: } r(t) = \frac{5}{3} \cdot e^{-3t}.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $h(t)$ и $r(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t) + r(t) = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \cdot e^{-3t}.$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = (2*s + 1)/s/(s + 3) \\ \text{ilaplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 3.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 5}.$$

Решење:

Имениоц задате функције се може написати и као:

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1)^2 + 4.$$

На тај начин задата функција се изражава:

$$F(s) = \frac{2}{(s + 1)^2 + 4}.$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација, према табели 1., под редним бројем 13., која гласи:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at} \cdot \sin \omega t ,$$

заменом за карактеристичну једначину где је $a=1, \omega=2$, добија се оригинал функције дате задатком:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^{-t} \cdot \sin 2t .$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = 2/(s^2 + 2*s + 5) \\ \text{ilaplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 4.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{4s+5}{s^2} + 2 .$$

Решење:

Почетну функцију можемо написати и у облику:

$$F(s) = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} + 2 .$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{4s+5}{s^2} + 2 = \frac{4}{s} + \frac{5}{s^2} + 2 = H(s) + R(s) + D(s) .$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R(s) + D(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R(s)] + \mathcal{L}^{-1}[D(s)] = h(t) + r(t) + d(t)$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = 4 .$$

За другу карактеристичну функцију $R(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5}{s^2}\right] = 5 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \text{ према Т.1-5., следи: } r(t) = 5t .$$

За трећу карактеристичну функцију $D(s)$, инверзна Лапласова трансформација комплексног лика Диракове функција $\delta(t)$:

$$d(t) = \mathcal{L}^{-1}[D(s)] = \mathcal{L}^{-1}[2] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}[1] \text{ према Т.1-1., следи: } d(t) = 2 \cdot \delta(t) .$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $h(t)$, $r(t)$ и $d(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t) + r(t) + d(t) = 4 + 5t + 2 \cdot \delta(t) .$$

Matlab code :

```
( >> f = (4*s + 5)/s^2 + 2 )
  ilaplace(f)
  returns
```

Задатак 5.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}.$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3}, \\ F(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3} = \frac{K_1(s+1)(s+3) + K_2s(s+3) + K_3s(s+1)}{s(s+1)(s+3)} = \\ &= \frac{K_1(s^2 + 3s + s + 3) + K_2(s^2 + 3s) + K_3(s^2 + s)}{s(s+1)(s+3)} = \\ &= \frac{K_1s^2 + 4K_1s + 3K_1 + K_2s^2 + 3K_2s + K_3s^2 + K_3s}{s(s+1)(s+3)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (4K_1 + 3K_2 + K_3)s + 3K_1}{s(s+1)(s+3)} \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (4K_1 + 3K_2 + K_3)s + 3K_1}{s(s+1)(s+3)} = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се

$$\text{Уз } s^2: K_1 + K_2 + K_3 = 0$$

$$\text{Уз } s: 4K_1 + 3K_2 + K_3 = 1,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 3K_1 = 2.$$

Систем једначина се решава уз помоћ Крамеровог правила:

Уколико за систем важи да је детерминанта $\det A \neq 0$, тада систем има јединствено решење $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, за дати систем једначина биће:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= 0 \\ 4K_1 + 3K_2 + K_3 &= 1 \\ 3K_1 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Delta K = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-3) - 9 = 3 - 9 = -6$$

$$\Delta K_1 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) - 6 = 2 - 6 = -4$$

$$\Delta K_2 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 0 + (8 - 3) = -2 + 5 = 3$$

$$\Delta K_3 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - (8 - 3) = 6 - 5 = 1$$

$$K_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta K} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad K_2 = \frac{\Delta K_2}{\Delta K} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}; \quad K_3 = \frac{\Delta K_3}{\Delta K} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3} = H(s) + R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = h(t) + r_1(t) + r_2(t)$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s}\right] = \frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = \frac{2}{3}.$$

За другу карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=1, \text{ следи:}$$

$$r_1(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-t}$$

За трећу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s+3}\right] = -\frac{1}{6} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=3, \text{ следи:}$$

$$r_2(t) = -\frac{1}{6} \cdot e^{-3t}.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $h(t)$, $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t) + r_1(t) + r_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{6} e^{-3t}.$$

Matlab code :

```
( >> f = (s + 2) / s / (s + 1) / (s + 3) )
  ilaplace(f)
  returns
```

Задатак 6.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 6}.$$

Решење:

Имениоц задате функције је квадратни трином који, уколико је дескриминанта $D > 0$, се може раставити на чиниоце по обрасцу:

$$as^2 + bs + c = a(s - s_1)(s - s_2),$$

$$D = b^2 - 4ac,$$

$$s_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

За дати квадратни трином биће:

$$s_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}; \quad s_1 = -2; \quad s_2 = -3$$

$$s^2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3)$$

Почетну функцију можемо написати и у облику:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}.$$

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3},$$

$$F(s) = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+3} = \frac{K_1(s+3) + K_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{K_1s + 3K_1 + K_2s + 2K_2}{(s+2)(s+3)} =$$

$$= \frac{(K_1 + K_2)s + (3K_1 + 2K_2)}{(s+2)(s+3)}.$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s + (3K_1 + 2K_2)}{(s+2)(s+3)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s: K_1 + K_2 = 1,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 3K_1 + 2K_2 = 1.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l} K_1 + K_2 = 1 & \begin{array}{l} K_1 = 1 - K_2 \\ 3(1 - K_2) + 2K_2 = 1 \\ -K_2 = -2 \end{array} \\ 3K_1 + 2K_2 = 1 & \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} K_1 = -1 \\ K_2 = 2 \end{array} \right.$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = -1 \cdot \frac{1}{s+2} + 2 \cdot \frac{1}{s+3}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} = -1 \cdot \frac{1}{s+2} + 2 \cdot \frac{1}{s+3} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = r_1(t) + r_2(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-1 \cdot \frac{1}{s+2}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 2, \text{ следи: } r_1(t) = -e^{-2t}.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 \cdot \frac{1}{s+3}\right] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 3, \text{ следи: } r_2(t) = 2e^{-3t}.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = r_1(t) + r_2(t) = -e^{-2t} + 2 \cdot e^{-3t}.$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = (s+1)/(s^2 + 5*s + 6) \\ \text{ilaplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 7.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s-1)(s-2)}.$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-1} + \frac{K_3}{s-2}, \\ F(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s-1} + \frac{K_3}{s-2} = \frac{K_1(s-1)(s-2) + K_2s(s-2) + K_3s(s-1)}{s(s-1)(s-2)} = \\ &= \frac{K_1(s^2 - 2s - s + 2) + K_2(s^2 - 2s) + K_3(s^2 - s)}{s(s-1)(s-2)} = \\ &= \frac{K_1s^2 - 3K_1s + 2K_1 + K_2s^2 - 2K_2s + K_3s^2 - K_3s}{s(s-1)(s-2)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (-3K_1 - 2K_2 - K_3)s + 2K_1}{s(s-1)(s-2)} \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (-3K_1 - 2K_2 - K_3)s + 2K_1}{s(s-1)(s-2)} = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s-1)(s-2)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се

$$\text{Уз } s^2: K_1 + K_2 + K_3 = 1$$

$$\text{Уз } s: -3K_1 - 2K_2 - K_3 = 3; \quad 3K_1 + 2K_2 + K_3 = -3,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 2K_1 = 4.$$

Систем једначина се решава уз помоћ Крамеровог правила:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= 1 \\ 3K_1 + 2K_2 + K_3 &= -3 \\ 2K_1 &= 4 \end{aligned}$$

$$\Delta K = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta K_1 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-4) - 8 = 4 - 8 = -4$$

$$\Delta K_2 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 - (-2) + (12 + 6) = -4 + 2 + 18 = 16$$

$$\Delta K_3 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (12 + 6) - 4 = 8 - 18 - 4 = -14$$

$$K_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta K} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad K_2 = \frac{\Delta K_2}{\Delta K} = \frac{16}{-2} = -8; \quad K_3 = \frac{\Delta K_3}{\Delta K} = \frac{-14}{-2} = 7$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s-1)(s-2)} = 2 \cdot \frac{1}{s} - 8 \cdot \frac{1}{s-1} + 7 \cdot \frac{1}{s-2}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s-1)(s-2)} = 2 \cdot \frac{1}{s} - 8 \cdot \frac{1}{s-1} + 7 \cdot \frac{1}{s-2} = H(s) + R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = h(t) + r_1(t) + r_2(t)$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[2 \cdot \frac{1}{s}\right] = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = 2.$$

За другу карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-8 \cdot \frac{1}{s-1}\right] = -8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 1, \text{ следи: } r_1(t) = -8 \cdot e^{+t}$$

За трећу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[7 \cdot \frac{1}{s-2}\right] = 7 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 2, \text{ следи: } r_2(t) = 7 \cdot e^{2t}.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $h(t)$, $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = h(t) + r_1(t) + r_2(t) = 2 - 8 \cdot e^t + 7e^{2t}.$$

Matlab code :

```
>> f = (s^2 + 3*s + 4)/s/(s-1)/(s-2)
    ilaplace(f)
    returns
```

Задатак 8.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)}.$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s^3} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 9}, \\ F(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s^3} + \frac{K_4s + K_5}{s^2 + 9} = \frac{K_1s^2(s^2 + 9) + K_2s(s^2 + 9) + K_3(s^2 + 9) + K_4s^3 + K_5s^3}{s^3(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{K_1s^4 + 9K_1s^2 + K_2s^3 + 9K_2s + K_3s^2 + 9K_3 + K_4s^4 + K_5s^3}{s^3(s^2 + 9)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_4)s^4 + (K_2 + K_5)s^3 + (9K_1 + K_3)s^2 + 9K_2 + 9K_3}{s^3(s^2 + 9)}. \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_4)s^4 + (K_2 + K_5)s^3 + (9K_1 + K_3)s^2 + 9K_2 + 9K_3}{s^3(s^2 + 9)} = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)}.$$

Изједначавањем бројилоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^4: K_1 + K_4 = 1$$

$$\text{Уз } s^3: K_2 + K_5 = 0$$

$$\text{Уз } s^2: 9K_1 + K_3 = 8$$

$$\text{Уз } s: 9K_2 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 9K_3 = 72.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 + K_4 = 1 \\ K_2 + K_5 = 0 \\ 9K_1 + K_3 = 8 \\ 9K_2 = 0 \\ 9K_3 = 72 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} K_3 = 8 \\ K_2 = 0 \\ K_5 = 0 \\ K_1 = 0 \\ K_4 = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} K_1 = K_2 = K_5 = 0 \\ K_3 = 8 \\ K_4 = 1 \end{array} .$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)} = 8 \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2 + 9} .$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{s^4 + 8s^2 + 72}{s^3(s^2 + 9)} = 8 \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^2 + 9} = R_1(s) + R_2(s) .$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = r_1(t) + r_2(t) .$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[8 \frac{1}{s^3}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] \text{ према Т.1-6. и } n = 2, \text{ следи: } r_1(t) = 4 \cdot t^2 .$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 9}\right] \text{ према Т.1-12. и } \omega = 3, \text{ следи: } r_2(t) = \cos 3t .$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = r_1(t) + r_2(t) = 4t^2 + \cos 3t .$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> f = (s^4 + 8*s^2 + 72)/s^3/(s^2 + 9) \\ \text{ilaplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 9.

Одредити инверзну Лапласову трансформацију за функцију:

$$F(s) = \frac{25}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)} .$$

Решење:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$F(s) = \frac{25}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 4s + 29} ,$$

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2s + K_3}{s^2 + 4s + 29} = \frac{K_1(s^2 + 4s + 29) + K_2s(s+2) + K_3(s+2)}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)} = \\
 &= \frac{K_1s^2 + 4K_1s + 29K_1 + K_2s^2 + 2K_2s + K_3s + 2K_3}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)} = \\
 &= \frac{(K_1 + K_2)s^2 + (4K_1 + 2K_2 + K_3)s + (29K_1 + 2K_3)}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)}
 \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s^2 + (4K_1 + 2K_2 + K_3)s + (29K_1 + 2K_3)}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)} = \frac{25}{(s+2)(s^2 + 4s + 29)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се

$$\text{Уз } s^2: K_1 + K_2 = 0$$

$$\text{Уз } s: 4K_1 + 2K_2 + K_3 = 0; ,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 29K_1 + 2K_3 = 25.$$

Систем једначина се решава уз помоћ Крамеровог правила:

$$\begin{aligned}
 K_1 + K_2 &= 0 \\
 4K_1 + 2K_2 + K_3 &= 0 \\
 29K_1 + &+ 2K_3 = 25
 \end{aligned}$$

$$\Delta K = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 29 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (8 - 29) + 0 = 4 + 21 = 25$$

$$\Delta K_1 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 25 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 - (-25) + 0 = 25$$

$$\Delta K_2 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 29 & 25 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

$$\Delta K_3 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 29 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 50 - 100 = -50$$

$$K_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta K} = \frac{25}{25} = 1; \quad K_2 = \frac{\Delta K_2}{\Delta K} = \frac{-25}{25} = -1; \quad K_3 = \frac{\Delta K_3}{\Delta K} = \frac{-50}{25} = -2.$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{25}{(s+2)(s^2+4s+29)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-s-2}{s^2+4s+29}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{25}{(s+2)(s^2+4s+29)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-s-2}{s^2+4s+29} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = r_1(t) + r_2(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=2, \text{ следи: } r_1(t) = e^{-2t}.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s-2}{s^2+4s+29}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+2)^2+25}\right] \text{ према Т.1-14. и } a=2; \omega=5, \\ \text{ следи: } r_2(t) = -e^{-2t} \cdot \cos 5t.$$

Оригинал функције дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = r_1(t) + r_2(t) = e^{-2t} - e^{-2t} \cos 5t = e^{-2t}(1 - \cos 5t).$$

Matlab code:

$$\left(\begin{array}{l} >> f = 25/(s+2)/(s^2+4*s+29) \\ \text{ilaplace}(f) \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

2.2.3. Решавање диференцијалних једначина применом Лапласових трансформација (примери решених задатака)

Задатак 1.

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + y = t^2 + 2,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + y] = \mathcal{L}[t^2 + 2].$$

На основу правила (теорема линеарности), табела 2. под редним бројем 1., Лапласова трансформација збира може се представити као збир Лапласових трансформација сабирака:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^2] + \mathcal{L}[2].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

У табели 2., правило 5. представља теорему о изводу оригинала.

$$\mathcal{L}[f(t)^{(n)}] = \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} \cdot f^{(k-1)}(0_-).$$

Захваљујући томе може се написати:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = \mathcal{L}\left[\frac{d^2 y}{dt^2}\right] = s^2 Y(s) - \sum_{k=1}^2 s^{2-k} \cdot f^{(k-1)}(0_-).$$

Како су сви почетни услови једнаки нули, сума у последњем изразу може се изједначити са нулом па је:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s).$$

За две функције са десне стране знака једнакости добијају се следеће вредности за Лапласове трансформације.

На основу табеле 1., под редним бројем 6., следи:

$$\mathcal{L}[t^2] = \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{2 \cdot 1}{s^3} = \frac{2}{s^3}.$$

такође, на основу табеле 1, под редним бројем 3., следи:

$$\mathcal{L}[2] = 2 \cdot \mathcal{L}[h(t)] = 2 \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{s}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{2(s^2 + 1)}{s^3}.$$

Како се $(s^2 + 1)$ појављује са обе стране знака једнакости, након скраћивања, вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{2}{s^3}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација како би се пронашао оригинал функције $y(t)$, који је уједно и решење диференцијалне једначине.

За карактеристичну функцију $Y(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right] \text{ према T1.-6, и } n = 2, \text{ следи } y(t) = t^2.$$

Коначно добија се решење диференцијалне једначине дате задатком:

$$y(t) = t^2.$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> \text{dsolve('D2y} = -y + t^2 + 2', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0') \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 2.

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + y = t^3 + 5t,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + y] = \mathcal{L}[t^3 + 5t].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^3] + \mathcal{L}[5t].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 6., следи:

$$\mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{s^4} = \frac{6}{s^3}.$$

На основу табеле 1, под редним бројем 5., следи:

$$\mathcal{L}[5t] = 5 \cdot \mathcal{L}[t] = 5 \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{5}{s^2}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{6}{s^4} + \frac{5}{s^2},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{6 + 5s^2}{s^4}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 6}{s^4(s^2 + 1)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног lika добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{5s^2 + 6}{s^4(s^2 + 1)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s^3} + \frac{K_4}{s^4} + \frac{K_5s + K_6}{s^2 + 1}, \\ Y(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3}{s^3} + \frac{K_4}{s^4} + \frac{K_5s + K_6}{s^2 + 1} = \\ &= \frac{K_1s^3(s^2 + 1) + K_2s^2(s^2 + 1) + K_3s(s^2 + 1) + K_4(s^2 + 1) + K_5s^5 + K_6s^4}{s^3(s^2 + 1)} = \\ &= \frac{K_1s^5 + K_1s^3 + K_2s^4 + K_2s^2 + K_3s^3 + K_3s + K_4s^2 + K_4 + K_5s^5 + K_6s^4}{s^3(s^2 + 1)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_5)s^5 + (K_2 + K_6)s^4 + (K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + K_3s + K_4}{s^3(s^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_5)s^5 + (K_2 + K_6)s^4 + (K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + K_3s + K_4}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{5s^2 + 6}{s^4(s^2 + 1)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^5: K_1 + K_5 = 0$$

$$\text{Уз } s^4: K_2 + K_6 = 0$$

$$\text{Уз } s^3: K_1 + K_3 = 0$$

$$\text{Уз } s^2: K_2 + K_4 = 5$$

$$\text{Уз } s: K_3 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } K_4 = 6.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l|l} K_1 + K_5 = 0 & K_4 = 6 & \\ K_2 + K_6 = 0 & K_3 = 0 & \\ K_1 + K_3 = 0 & K_2 = -1 & \\ K_2 + K_4 = 5 & K_1 = 0 & \\ K_3 = 0 & K_6 = 1 & \\ K_4 = 6 & K_5 = 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} K_1 = K_3 = K_5 = 0 \\ K_2 = -1 \\ K_4 = 6 \\ K_6 = 1 \end{array}$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 6}{s^4(s^2 + 1)} = -1 \cdot \frac{1}{s^2} + 6 \cdot \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{5s^2 + 6}{s^4(s^2 + 1)} = -1 \cdot \frac{1}{s^2} + 6 \cdot \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2 + 1} = R_1(s) + R_2(s) + R_3(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s) + R_3(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_3(s)] = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \text{ према Т.1-5. ,следи: } r_1(t) = -t.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[6 \cdot \frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{s^4}\right] \text{ према Т.1-6. и } n = 3, \text{ следи: } r_2(t) = t^3.$$

За трећу карактеристичну функцију $R_3(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_3(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 1}\right] \text{ према Т.1-11. и } \omega = 1, \text{ следи: } r_3(t) = \sin t.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$, $r_2(t)$ и $r_3(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = r_1(t) + r_2(t) + r_3(t) = -t + t^3 + \sin t.$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> \text{dsolve('D2y = -y + t^3 + 5 * t', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0')} \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 3.

Решити диференцијалну једначину:

$$\dot{y} + y = 5e^{-t},$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\dot{y} + y] = \mathcal{L}[5e^{-t}].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\dot{y}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[5e^{-t}].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = sY(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s+1},$$

одакле се добија:

$$(s+1)Y(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $Y(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] \text{ према T1.-9, и } a=1, \text{ следи } y(t) = t \cdot e^{-t}.$$

Коначно добија се решење диференцијалне једначине дате задатком:

$$y(t) = t \cdot e^{-t}.$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> \text{dsolve('Dy} = -y + 5 * \exp(-t)', 'y(0) = 0') \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 4:

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + 9y = 9,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + 9y] = \mathcal{L}[9].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[9y] = \mathcal{L}[9].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[9y] = 9 \cdot \mathcal{L}[y] = 9Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 3., следи:

$$\mathcal{L}[9] = 9 \cdot \mathcal{L}[h(t)] = 9 \frac{1}{s}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + 9 \cdot Y(s) = \frac{9}{s},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 9)Y(s) = \frac{9}{s}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Вредност функције у временском домену, за овај случај, се може одредити на два начина:

Начин 1:

За карактеристичну функцију $Y(s)$, инверзна Лапласова трансформација према табели 1., редним бројем 15.:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s(s^2 + \omega^2)}\right] = 1 - \cos \omega t,$$

За дату функцију и $\omega = 3$ следи:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9}{s(s^2 + 9)}\right] = 1 - \cos 3t.$$

Начин 2:

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 9},$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 9} = \frac{K_1(s^2 + 9) + K_2 s^2 + K_3 s}{s(s^2 + 9)} =$$

$$= \frac{K_1 s^2 + 9K_1 + K_2 s^2 + K_3 s}{s(s^2 + 9)} = \frac{(K_1 + K_2)s^2 + K_3 s + 9K_1}{s(s^2 + 9)}.$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s^2 + K_3 s + 9K_1}{s(s^2 + 9)} = \frac{9}{s(s^2 + 9)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^2: K_1 + K_2 = 0$$

$$\text{Уз } s: K_3 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 9K_1 = 9.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l|l} K_1 + K_2 = 0 & K_1 = 1 & K_1 = 1 \\ K_3 = 0 & \Rightarrow K_3 = 0 & \Rightarrow K_2 = -1 \\ 9K_1 = 9 & K_2 = -1 & K_3 = 0 \end{array}$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 9} = H(s) + R(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R(s)] =$$

$$= h(t) + r(t).$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3. ,следи: } h(t) = 1.$$

За другу карактеристичну функцију $R(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r(t) = \mathcal{L}^{-1}[R(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{s}{s^2 + 9}\right] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 9}\right] \text{ према Т.1-12. и } \omega = 3, \text{ следи:}$$

$$r(t) = \cos 3t.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $h(t)$ и $r(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = h(t) + r(t) = 1 - \cos 3t.$$

Matlab code :

```
( >> dsolve('D2y = -9 * y + 9', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0')
returns
```

Задатак 5.

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + 4y = 4t,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + 4y] = \mathcal{L}[4t].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[4y] = \mathcal{L}[4t].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[4y] = 4 \cdot \mathcal{L}[y] = 4Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 5., следи:

$$\mathcal{L}[4t] = 4 \cdot \mathcal{L}[t] = 4 \frac{1}{s^2}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + 4 \cdot Y(s) = \frac{4}{s^2},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 4)Y(s) = \frac{4}{s^2}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + 4},$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + 4} = \frac{K_1 s(s^2 + 4) + K_2(s^2 + 4) + K_3 s^3 + K_4 s^2}{s^2(s^2 + 4)} =$$

$$= \frac{K_1 s^3 + 4K_1 s + K_2 s^2 + 4K_2 + K_3 s^3 + K_4 s^2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + 4K_1 s + 4K_2}{s^2(s^2 + 4)}.$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + 4K_1 s + 4K_2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^3: K_1 + K_3 = 0$$

$$\text{Уз } s^2: K_2 + K_4 = 0$$

$$\text{Уз } s: 4K_1 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 4K_2 = 4.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l|l} K_1 + K_3 = 0 & K_2 = 1 & K_1 = 0 \\ K_2 + K_4 = 0 & K_1 = 0 & K_2 = 1 \\ 4K_1 = 0 & K_4 = -1 & K_3 = 0 \\ 4K_2 = 4 & K_3 = 0 & K_4 = -1 \end{array} \Rightarrow$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] =$$

$$= r_1(t) + r_2(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \text{ према Т.1-6. и } n = 1, \text{ следи: } r_1(t) = t.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s^2 + 4}\right] = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + 4}\right] \text{ према Т.1-11. и } \omega = 2, \text{ следи:}$$

$$r_2(t) = -\frac{1}{2} \sin 2t.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = r_1(t) + r_2(t) = t - \frac{1}{2} \sin 2t.$$

Matlab code :

```
(>> dsolve('D2y = -4 * y + 4 * t', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0')
returns
```

Задатак 6.

Решити диференцијалну једначину:

$$\dot{y} - y = e^{-2t},$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\dot{y} - y] = \mathcal{L}[e^{-2t}].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\dot{y}] - \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{-2t}].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\dot{y}] = sY(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 7., следи:

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$sY(s) - Y(s) = \frac{1}{s+2},$$

одакле се добија:

$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s+2}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{K_1}{s-1} + \frac{K_2}{s+2},$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{s-1} + \frac{K_2}{s+2} = \frac{K_1(s+2) + K_2(s-1)}{(s-1)(s+2)} =$$

$$= \frac{K_1s + 2K_1 + K_2s - K_2}{(s-1)(s+2)} = \frac{(K_1 + K_2)s + (2K_1 - K_2)}{(s-1)(s+2)}.$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s + (2K_1 - K_2)}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{(s-1)(s+2)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s: K_1 + K_2 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 2K_1 - K_2 = 1.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 + K_2 = 0 \\ 2K_1 - K_2 = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K_1 = -K_2 \\ -2K_2 - K_2 = 1 \\ K_2 = -\frac{1}{3} \end{array} \right| \Rightarrow \left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{3} \\ K_2 = -\frac{1}{3} \end{array} \right|$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+2}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s+2} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] =$$

$$= r_1(t) + r_2(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \frac{1}{s-1}\right] = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=1, \text{ следи: } r_1(t) = \frac{1}{3} \cdot e^t.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{3} \frac{1}{s+2}\right] = -\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=2, \text{ следи:}$$

$$r_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-2t}.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = r_1(t) + r_2(t) = \frac{1}{3} \cdot e^t - \frac{1}{3} \cdot e^{-2t} = \frac{1}{3} \cdot e^t (1 - e^{-3t}).$$

Matlab code :

```
(>> dsolve('Dy = y + exp(-2 * t)', 'y(0) = 0')
returns
```

Задатак 7.

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + y = \cos 2t,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + y] = \mathcal{L}[\cos 2t].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\cos 2t].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[y] = Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 12., следи:

$$\mathcal{L}[\cos 2t] = \frac{s}{s^2 + 4}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 1} + \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + 4}, \\
 Y(s) &= \frac{K_1 s + K_2}{s^2 + 1} + \frac{K_3 s + K_4}{s^2 + 4} = \frac{K_1 s(s^2 + 4) + K_2(s^2 + 4) + K_3 s(s^2 + 1) + K_4(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \\
 &= \frac{K_1 s^3 + 4K_1 s + K_2 s^2 + 4K_2 + K_3 s^3 + K_3 s + K_4 s^2 + K_4}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \\
 &= \frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + (4K_1 + K_3)s + (4K_2 + K_4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.
 \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + (4K_1 + K_3)s + (4K_2 + K_4)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^3: K_1 + K_3 = 0,$$

$$\text{Уз } s^2: K_2 + K_4 = 0,$$

$$\text{Уз } s: 4K_1 + K_3 = 1,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 4K_2 + K_4 = 0.$$

Систем једначина се решава методом замене:

$$\begin{array}{l|l|l}
 K_1 + K_3 = 0 & K_1 = -K_3 & K_1 = \frac{1}{3} \\
 K_2 + K_4 = 0 & -4K_3 + K_3 = 1 & K_2 = 0 \\
 4K_1 + K_3 = 1 & K_2 = -K_4 & K_3 = -\frac{1}{3} \\
 4K_2 + K_4 = 0 & -4K_4 + K_4 = 0 & K_4 = 0
 \end{array}$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s^2 + 4}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{s^2 + 4} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \\
 &= r_1(t) + r_2(t).
 \end{aligned}$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 1}\right] = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 1}\right] \text{ према Т.1-12. и } \omega = 1, \text{ следи: } r_1(t) = \frac{1}{3} \cos t.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{3} \frac{s}{s^2 + 4}\right] = -\frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4}\right] \text{ према Т.1-12. и } \omega = 2, \text{ следи:}$$

$$r_2(t) = -\frac{1}{3} \cdot \cos 2t.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = r_1(t) + r_2(t) = \frac{1}{3} \cdot \cos t - \frac{1}{3} \cdot \cos 2t = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 2t).$$

Matlab code :

$$\left(\begin{array}{l} >> \text{dsolve('D2y = -y + cos 2t', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0')} \\ \text{returns} \end{array} \right)$$

Задатак 8.

Решити диференцијалну једначину:

$$\ddot{y} + 2y = 3t,$$

при нултим почетним условима.

Решење:

Лапласова трансформација се примењује на обе стране ове једначине:

$$\mathcal{L}[\ddot{y} + 2y] = \mathcal{L}[3t].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] + \mathcal{L}[2y] = \mathcal{L}[3t].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{y}] = s^2 Y(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[2y] = 2 \cdot \mathcal{L}[y] = 2Y(s).$$

На основу табеле 1., под редним бројем 5., следи:

$$\mathcal{L}[3t] = 3 \cdot \frac{1}{s^2}.$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 Y(s) + 2Y(s) = \frac{3}{s^2},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 2)Y(s) = \frac{3}{s^2}.$$

Вредност комплексног лика функције $y(t)$ је:

$$Y(s) = \frac{3}{s^2(s^2 + 2)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3s + K_4}{s^2 + 2}, \\ Y(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s^2} + \frac{K_3s + K_4}{s^2 + 4} = \frac{K_1s(s^2 + 2) + K_2(s^2 + 2) + K_3s^3 + K_4s^2}{s^2(s^2 + 4)} = \\ &= \frac{K_1s^3 + 2K_1s + K_2s^2 + 2K_2 + K_3s^3 + K_4s^2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + 2K_1s + 2K_2}{s^2(s^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_3)s^3 + (K_2 + K_4)s^2 + 2K_1s + 2K_2}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{3}{s^2(s^2 + 2)}.$$

Изједначавањем бројилоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s^3: K_1 + K_3 = 0$$

$$\text{Уз } s^2: K_2 + K_4 = 0$$

$$\text{Уз } s: 2K_1 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 2K_2 = 3.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l|l} K_1 + K_3 = 0 & K_2 = \frac{3}{2} & K_1 = 0 \\ K_2 + K_4 = 0 & K_1 = 0 & K_2 = \frac{3}{2} \\ 2K_1 = 0 & K_4 = -\frac{3}{2} & K_3 = 0 \\ 2K_2 = 3 & K_3 = 0 & K_4 = -\frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$Y(s) = \frac{3}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$Y(s) = \frac{3}{s^2(s^2 + 2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \\ &= r_1(t) + r_2(t). \end{aligned}$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2}\right] = \frac{3}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \text{ према Т.1-6. и } n=1, \text{ следи: } r_1(t) = \frac{3}{2}t.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 2}\right] = -\frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{s^2 + (\sqrt{2})^2}\right] = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2}\right]$$

према Т.1-11. и $\omega = \sqrt{2}$, следи:

$$r_2(t) = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \sin \sqrt{2}t.$$

Коначно оригинал функције, који је уједно и решење диференцијалне једначине дате задатком добија се као збир функција $r_1(t)$ и $r_2(t)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = r_1(t) + r_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin \sqrt{2}t = \frac{3}{2}\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \sqrt{2}t\right).$$

Matlab code :

```
(>> dsolve('D2y = -2 * y + 3 * t', 'Dy(0) = 0', 'y(0) = 0')
returns
```

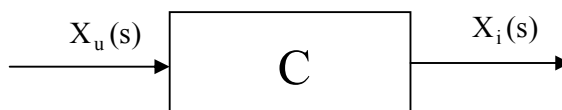
3. ПРЕНОСНА ФУНКЦИЈА СИСТЕМА

Преносна функција система је један од основних појмова везаних за линеарне стационарне системе са усредсређеним параметрима. Она омогућава анализу динамичких особина система у комплексном домену, што у многим случајевима представља најефикаснији и најједноставнији приступ за решавање проблема таквих система.

Разматра се вишеструко преносни систем са слике 2.1. са улазним величинама x_{uk} , $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ и излазним величинама x_{iq} , $q \in \{1, 2, \dots, N\}$, чији математички модел је дефинисан диференцијалном једначином понашања:

$$a_n x_i^{(n)}(t) + a_{n-1} x_i^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 x_i(t) = b_0 x_u(t) + \dots + b_{m-1} x_u^{(m-1)}(t) + b_m x_u^{(m)}(t), \quad n \geq m.$$

Због једноставности излагања уочава се систем са једним улазом и једним излазом као на слици 3.1.



Слика 3.1. Систем са једним улазом и излазом

Преносна функција неког система представља однос Лапласових трансформација излаза и улаза диференцијалне једначине која описује понашање система:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}.$$

3.1. Одређивање преносне функције система (примери решених задатака)

Задатак 1.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$\ddot{x}_i(t) + 4x_i(t) = 16x_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i + 4x_i] = \mathcal{L}[16x_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i] + \mathcal{L}[4x_i] = \mathcal{L}[16x_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i] = s^2 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[4x_i] = 4 \cdot \mathcal{L}[x_i] = 4X_i(s).$$

На основу дефиниције директне Лапласове трансформације, за десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[16x_u] = 16 \cdot \mathcal{L}[x_u] = 16X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 X_i(s) + 4X_i(s) = 16X_u(s),$$

односно:

$$(s^2 + 4)X_i(s) = 16X_u(s).$$

С обзиром да преносна функција неког система представља однос Лапласових трансформација излаза и улаза диференцијалне једначине која описује понашање система, у овом случају преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{16}{s^2 + 4}.$$

Matlab code :

```
( >> I=[16];  
>> U=[1 0 4];  
>> W = tf(I,U)  
returns )
```

Задатак 2.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\dot{x}_i(t) + x_i(t) = \dot{x}_u(t) + x_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i + 2\dot{x}_i + x_i] = \mathcal{L}[\dot{x}_u + x_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}[x_i] + \mathcal{L}[2\dot{x}_i] + \mathcal{L}[x_i] = \mathcal{L}[\dot{x}_u + x_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i] = s^2 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[2\dot{x}_i] = 2 \cdot \mathcal{L}[\dot{x}_i] = 2 \cdot sX_i(s).$$

За трећи сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[x_i] = X_i(s).$$

На основу табеле 2., под редним бројем 5., за десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[\dot{x}_u] = sX_u(s),$$

и

$$\mathcal{L}[x_u] = X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 X_i(s) + 2sX_i(s) + X_i(s) = sX_u(s) + X_u(s),$$

односно:

$$(s^2 + 2s + 1)X_i(s) = (s + 1)X_u(s).$$

Преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s + 1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{s + 1}{(s + 1)^2} = \frac{1}{s + 1}.$$

Matlab code :

```
(>> I=[1];
>> U=[1 1];
>> W=tf(I,U)
returns)
```

Задатак 3.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$3\ddot{x}_i(t) + 2\dot{x}_i(t) + x_i(t) = 2\ddot{x}_u(t) + \dot{x}_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[3\ddot{x}_i + 2\dot{x}_i + x_i] = \mathcal{L}[2\ddot{x}_u + \dot{x}_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[3\ddot{x}_i] + \mathcal{L}[2\dot{x}_i] + \mathcal{L}[x_i] = \mathcal{L}[2\ddot{x}_u + \dot{x}_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[3\ddot{x}_i] = 3 \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}_i] = 3 \cdot s^2 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[2\dot{x}_i] = 2 \cdot \mathcal{L}[\dot{x}_i] = 2 \cdot s X_i(s).$$

За трећи сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[x_i] = X_i(s).$$

На основу табеле 2., под редним бројем 5., за десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[2\ddot{x}_u] = 2 \cdot s^2 X_u(s),$$

и

$$\mathcal{L}[\dot{x}_u] = s X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$3s^2 X_i(s) + 2s X_i(s) + X_i(s) = 2s^2 X_u(s) + s X_u(s),$$

односно:

$$(3s^2 + 2s + 1)X_i(s) = (2s^2 + s)X_u(s).$$

Преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{2s^2 + s}{3s^2 + 2s + 1}.$$

Matlab code :

```
(>> I=[2 1 0];
>> U=[3 2 1];
>> W = tf(I,U)
returns)
```

Задатак 4.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$\ddot{x}_i(t) + 5 \dot{x}_i(t) = 25x_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i + 5 \dot{x}_i] = \mathcal{L}[25x_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i] + \mathcal{L}[5 \dot{x}_i] = \mathcal{L}[25x_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_i] = s^2 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[5 \dot{x}_i] = 5 \cdot \mathcal{L}[\dot{x}_i] = 5 \cdot s X_i(s).$$

За десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[25x_u] = 25 \cdot \mathcal{L}[x_u] = 25X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$s^2 X_i(s) + 5s X_i(s) = 25X_u(s),$$

односно:

$$(s^2 + 5s)X_i(s) = 25X_u(s).$$

Преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{25}{s^2 + 5s}.$$

Matlab code:

```
( >> I=[25];  
>> U=[1 5 0];  
>> W = tf(I, U)  
returns )
```

Задатак 5.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$4x_i^{(III)}(t) + 3\dot{x}_i(t) + x_i(t) = x_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[4x_i^{(III)} + 3\dot{x}_i + x_i] = \mathcal{L}[x_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[4x_i^{(III)}] + \mathcal{L}[3\dot{x}_i] + \mathcal{L}[x_i] = \mathcal{L}[x_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[4x_i^{(III)}] = 4 \cdot \mathcal{L}[x_i^{(III)}] = 4 \cdot s^3 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[3\dot{x}_i] = 3 \cdot \mathcal{L}[\dot{x}_i] = 3 \cdot sX_i(s).$$

За трећи сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[x_i] = X_i(s).$$

За десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[x_u] = X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$4s^3 X_i(s) + 3sX_i(s) + X_i(s) = X_u(s),$$

односно:

$$(4s^3 + 3s + 1)X_i(s) = X_u(s).$$

Преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{1}{4s^3 + 3s + 1}.$$

Matlab code :

```
( >> I = [1];  
>> U = [4 0 3 1];  
>> W = tf(I, U)  
returns )
```

Задатак 6.

Одредити преносну функцију система, чије је понашање описано диференцијалном једначином:

$$5x_i^{(III)} + 3\ddot{x}_i(t) + \dot{x}_i(t) + x_i(t) = \ddot{x}_u(t) + x_u(t),$$

где $x_u(t)$ представља улазну а $x_i(t)$ излазну величину система, и ако су сви почетни услови једнаки нули.

Решење:

Уз помоћ Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из временског у комплексни домен:

$$\mathcal{L}[5x_i^{(III)} + 3\ddot{x}_i + \dot{x}_i + x_i] = \mathcal{L}[\ddot{x}_u + x_u].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1.. следи:

$$\mathcal{L}[5x_i^{(III)}] + \mathcal{L}[3\ddot{x}_i] + \mathcal{L}[\dot{x}_i] + \mathcal{L}[x_i] = \mathcal{L}[\ddot{x}_u + x_u].$$

За сваки од сабирака тражи се комплексни лик Лапласовим трансформацијама према табелама 1. и 2.

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\mathcal{L}[5x_i^{(III)}] = 5 \cdot \mathcal{L}[x_i^{(III)}] = 5 \cdot s^3 X_i(s).$$

За други сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[3\ddot{x}_i] = 3 \cdot \mathcal{L}[\ddot{x}_i] = 3 \cdot s^2 X_i(s).$$

За трећи сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[\dot{x}_i] = \mathcal{L}[\dot{x}_i] = s X_i(s).$$

За четврти сабирак са леве стране, диференцијалне једначине, добија се:

$$\mathcal{L}[x_i] = X_i(s).$$

На основу табеле 2., под редним бројем 5., за десну страну диференцијалне једначине такође следи:

$$\mathcal{L}[\ddot{x}_u] = s^2 X_u(s),$$

и

$$\mathcal{L}[x_u] = X_u(s).$$

На основу добијених вредности следи да је:

$$5s^3 X_i(s) + 3s^2 X_i(s) + s X_i(s) + X_i(s) = s^2 X_u(s) + X_u(s),$$

односно:

$$(5s^3 + 3s^2 + s + 1)X_i(s) = (s^2 + 1)X_u(s).$$

Преносна функција представљаће однос комплексних ликова излаза $X_i(s)$ и улаза $X_u(s)$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s^2 + 1}{5s^3 + 3s^2 + s + 1}.$$

Matlab code :

```
>> I=[1 0 1];  
>> U=[5 3 1 1];  
>> W = tf(I,U)  
returns
```

4. ВРЕМЕНСКИ ОДЗИВИ СИСТЕМА

Дефиниција: Промена излаза система у току времена, било да је изазвана дејством улаза било дејством почетних услова, било дејством и улаза и почетних услова, је *временски одзив система*, или краће *одзив система*.

Математички посматрано, одзив система је *решење диференцијалне једначине понашања* тог система за задату промену улаза и задате почетне услове.

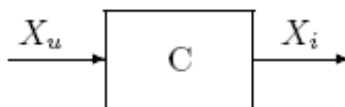
Захваљујући закону суперпозиције, Одељак 4.1, који важи за линеарне системе, одзиви система на сложене промене улазних величина, могу да се добију једноставним сабирањем одзива на једноставне, типичне, промене улазних величина. Ова особина линеарних система битно поједностављује анализу њиховог динамичког понашања.

Дакле одзив система је реакција система на улазни сигнал. Улазни сигнали обично нису познати, а често имају и случајни карактер. Да би се системи могли поредити потребно је располагати заједничком основом- преносном функцијом тог система. Поређење се остварује довођењем стандарних улазних сигнала и упоређење одзива система на дате карактеристичне улазе.

4.1. Закон суперпозиције

Једна од најважнијих особина коју имају линеарни системи је да за њих важи закон суперпозиције, шта више они су тако и дефинисани, тј. неки систем јесте линеаран ако за њега важи закон суперпозиције.

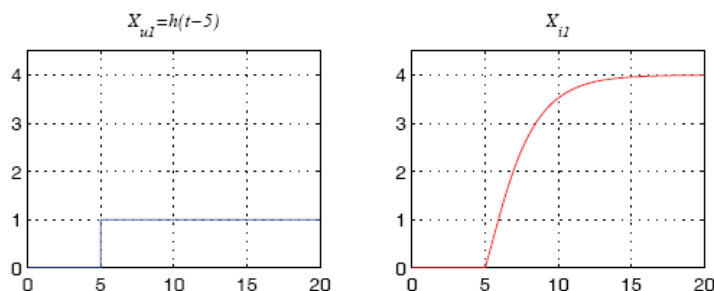
Илуструјмо то на једном примеру пре него што тај закон егзактно искажемо. Посматра се један једноструко преносни систем, тј. систем који има једну улазну и једну излазну величину, слика 4.1.



Слика 4.1. Једноструки преносни систем

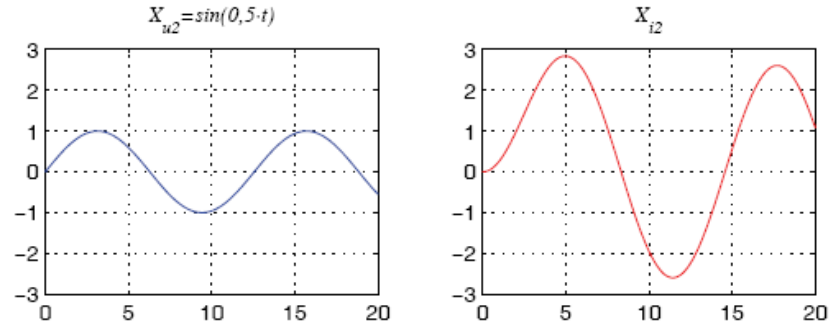
Утврђивање особине линеарности одзива система може да се објасни извођењем следећа три експеримента или симулације (изложени резултати су симулациони):

- Систем се побуђује произвољном улазном величином, нпр. јединичном одскочном функцијом са кашњењем $x_u = h(t-5)$. Означимо овакву промену улазне величине са x_{u1} (улазна величина x_u у првом експерименту или симулацији). Одзив разматраног система на такву побуду $x_i(x_{u1})$, означен са x_{i1} , при нултим почетним условима је приказан на слици 4.2.



Слика 4.2. График одзива система на $x_{u1} = h(t - 5)$

- У другом експерименту или симулацији, побудимо систем неком другом произвољном улазном величином, нпр. синусном функцијом $x_u = \sin(0,5t)$, и означимо такву промену са x_{u2} . Синусни одзив $x_i(x_{u2})$ означен са x_{i2} , при нултим почетним условима приказан је на слици 4.3.

Слика 4.3. График одзива система на $x_{u2} = \sin(0,5t)$

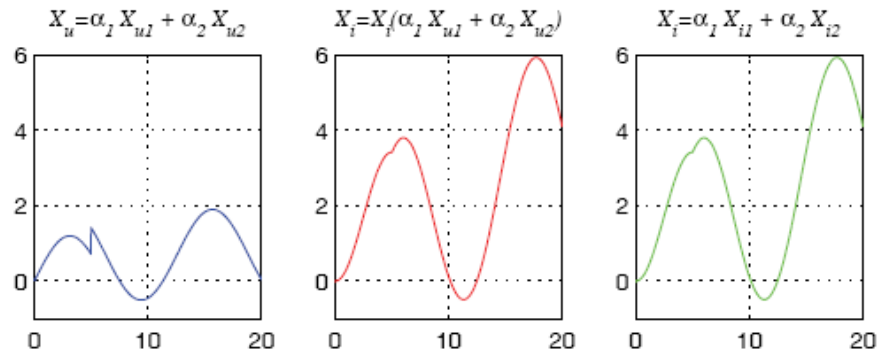
- На крају, систем се побуђује улазном величином која је једнака пондерисаном збиру улазних величина из прва два експеримента, тј. симулације:

$$x_u = \alpha_1 x_{u1} + \alpha_2 x_{u2},$$

При чему су за α_1 и α_2 усвојене следеће вредности:

$$\alpha_1 = 0,7 \quad \alpha_2 = 1,2.$$

Добијени одзив система на тај сложени улаз је приказан на средњој слици (црвена крива) слика 4.4.



Слика 4.4. Одзив система на $x_u = \alpha_1 x_{u1} + \alpha_2 x_{u2} = 0,7 \cdot h(t - 5) + 1,2 \cdot \sin(0,5 \cdot t)$ и збир одзива $x_i = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2} = 0,7 \cdot x_{i1} + 1,2 \cdot x_{i2}$

Тако добијени одзив се упоређује са пондерисаним (на исти начин $\alpha_1 = 0,7$, $\alpha_2 = 1,2$) збиром партикуларних одзива x_{i1} из прве симулације и x_{i2} из друге симулације. Такав збир је приказан на десној слици (зелена крива) слика 4.4.

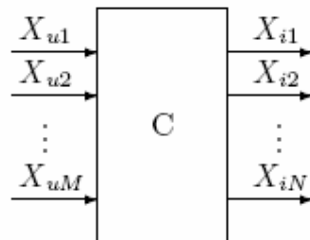
Ако су та два одзива:

$$x_i = x_i(x_u) = x_i(\alpha_1 x_{u1} + \alpha_2 x_{u2}) \text{ и}$$

$$x_i = \alpha_1 x_i(x_{u1}) + \alpha_2 x_i(x_{u2}) = \alpha_1 x_{i1} + \alpha_2 x_{i2}$$

једнака и ако то важи за било које x_u из првог експеримента x_{u1} , било које x_u из другог експеримента x_{u2} , било које, онда за одзив тог система важи закон суперпозиције.

Ако се разматра вишеструко преносни систем: чији је збир броја улазних и броја излазних величина $M + N < 2$, слика 4.5., онда закон супер позиције може да се искаже у општем случају.



Слика 4.5. Вишеструко преносни систем

Дефиниција: За одзив система C , слика 4.5., важи закон суперпозиције ако и само ако важи:

$$x_i(\alpha_1 x_{u1} + \alpha_2 x_{u2}) \equiv \alpha_1 x_i(x_{u1}) + \alpha_2 x_i(x_{u2}).$$

Овај идентитет исказује да тај израз важи за било коју комбинацију улазних величина x_{ui} , $i = 1, 2, \dots, M$, у оквиру вектора x_{u1} и x_{u2} :

$$x_{u1} = \begin{pmatrix} x_{u1} \\ x_{u2} \\ \vdots \\ x_{uM} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad x_{u2} = \begin{pmatrix} x_{u1} \\ x_{u2} \\ \vdots \\ x_{uM} \end{pmatrix}$$

и за било које реалне бројеве α_1 и α_2 , тј. овај идентитет може да се прикаже следећом једначином:

$$x_i(\alpha_1 x_{u1} + \alpha_2 x_{u2}) \equiv \alpha_1 x_i(x_{u1}) + \alpha_2 x_i(x_{u2}), \quad \forall (\alpha_1, \alpha_2, x_{u1}, x_{u2}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^M.$$

Систем C , слика 4.5., за чији одзив важи закон суперпозиције је излазно линеаран. То не значи да је систем (комплетно) линеаран.

4.2. Одређивање карактеристичних одзива система (примери решених задатака)

Задатак 1.

За систем дефинисан преносном функцијом, која је добијена решењем задатка 1. у поглављу 3.:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{16}{s^2 + 4},$$

и за све почетне услове једнаке нули, одредити:

- а) јединични одскачни одзив;
- б) јединични импулсни одзив.

Решење:

Преносна функција је дефинисан изразом:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}.$$

Овај израз се може написати и као:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Заменом задатком дате преносне функције у последњи израз, добија се:

$$X_i(s) = \frac{16}{s^2 + 4} \cdot X_u(s).$$

а)

За добијање одговарајућег јединичног одскочног одзива на улаз система доводи се јединични одскочни сигнал $h(t)$, који се на основу табеле 1., редни број 3. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}$. Заменом уместо $X_u(s)$ у претходној једначини добија се :

$$X_i(s) = \frac{16}{s^2 + 4} \cdot \frac{1}{s} = \frac{16}{s(s^2 + 4)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $X_i(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{s(s^2 + 4)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s(s^2 + 4)}\right] \text{ према T1.-15, и } \omega = 2, \text{ следи}$$

$$x_i(t) = 4(1 - \cos 2t).$$

Коначно добија се јединични одскочни одзив за дату преносну функцију, слика 4.6. (step response):

$$x_i(t) = 4(1 - \cos 2t).$$

б)

За добијање одговарајућег јединичног импулсног одзива доводи се јединични импулсни сигнал $\delta(t)$ -Диракова функција, који се на основу табеле 1., редни број 1. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Заменом уместо $X_u(s)$ добија се:

$$X_i(s) = \frac{16}{s^2 + 4} \cdot 1 = \frac{16}{(s^2 + 4)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $X_i(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{16}{(s^2 + 4)}\right] = 8 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s^2 + 4)}\right] \text{ према T1.-11, и } \omega = 2, \text{ следи}$$

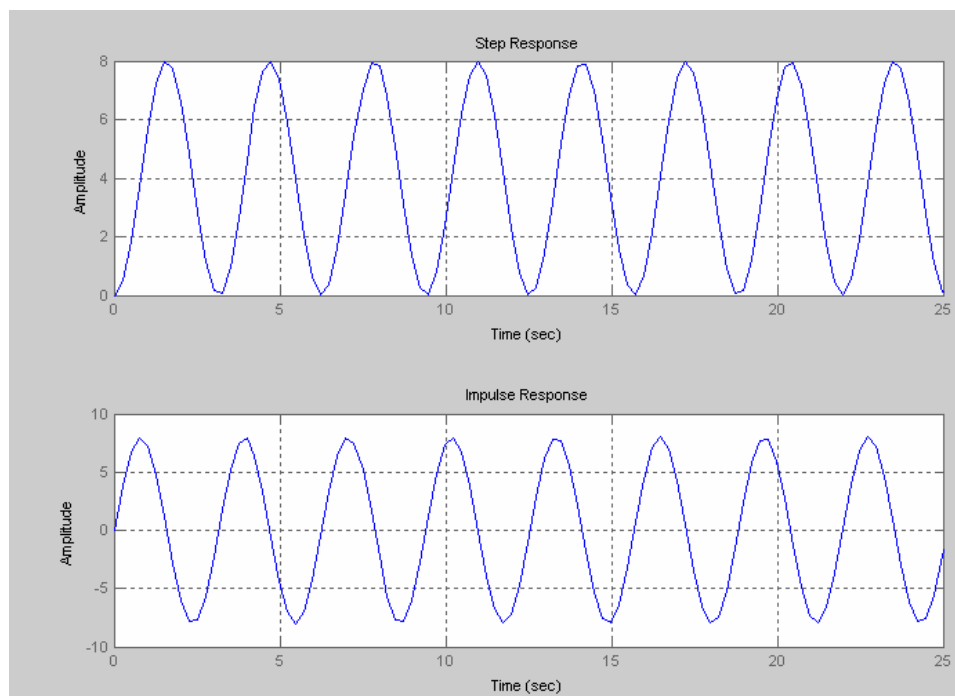
$$x_i(t) = 8 \sin 2t.$$

Коначно добија се јединични импулсни одзив за дату преносну функцију, слика 4.6. (impulse response):

$$x_i(t) = 8 \sin 2t.$$

Matlab code :

```
( >> I=[16];  
>> U=[1 0 4];  
>> W = tf(I,U)  
ltiview({'step';'impulse'}, W)  
returns )
```



Слика 4.6. Графици јединичног одскочног одзива система (*step response*) и јединичног импулсног одзива система (*impulse response*) за дату преносну функцију $W(s)$

Задатак 2.

За систем дефинисан преносном функцијом, која је добијена решењем задатка 2. у поглављу 3.:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{1}{s+1},$$

и за све почетне услове једнаке нули, одредити:

- јединични одскочни одзив;
- јединични импулсни одзив.

Решење:

Преносна функција је дефинисан изразом:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}.$$

Овај израз се може написати и као:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Заменом задатком дате преносне функције у последњи израз, добија се:

$$X_i(s) = \frac{1}{s+1} \cdot X_u(s).$$

а)

За добијање одговарајућег јединичног одскочног одзива на улаз система доводи се јединични одскочни сигнал $h(t)$, који се на основу табеле 1., редни број 3. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}$. Заменом уместо $X_u(s)$ у претходној једначини добија се :

$$X_i(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+1)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $X_i(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right] \text{ према T1.-8, и } a=1, \text{ следи } x_i(t) = 1 - e^{-t}.$$

Коначно добија се јединични одскочни одзив за дату преносну функцију, слика 4.7. (step response):

$$x_i(t) = 1 - e^{-t}.$$

б)

За добијање одговарајућег јединичног импулсног одзива доводи се јединични импулсни сигнал $\delta(t)$ -Диракова функција, који се на основу табеле 1., редни број 1. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Заменом уместо $X_u(s)$ добија се:

$$X_i(s) = \frac{1}{s+1} \cdot 1 = \frac{1}{(s+1)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $X_i(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

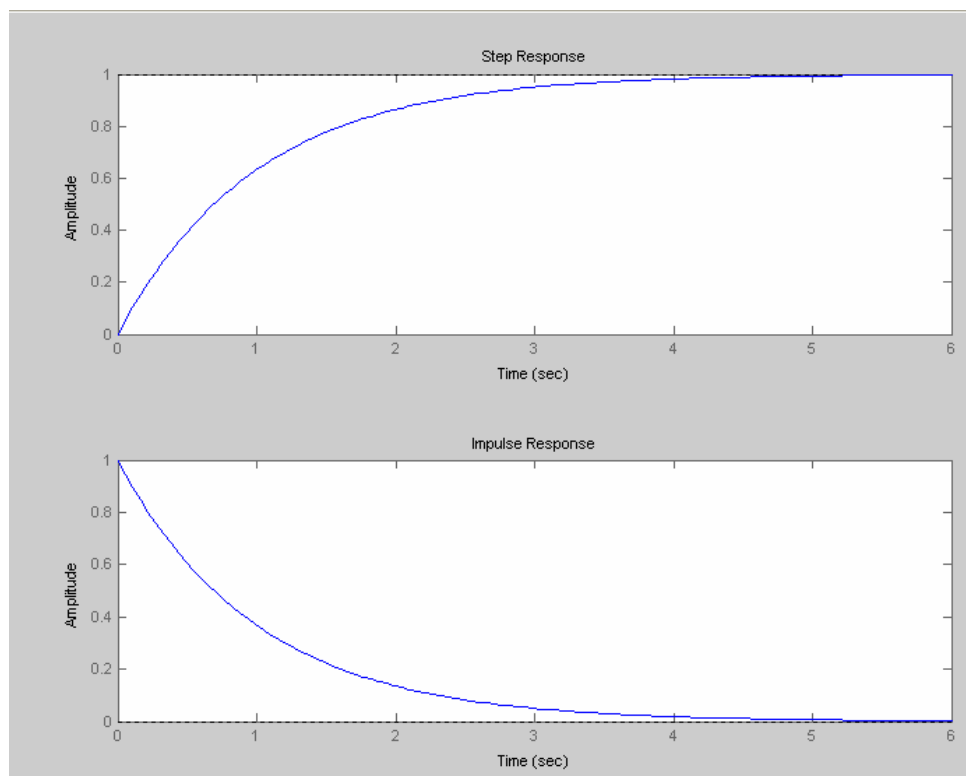
$$\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)}\right] \text{ према T1.-7, и } a=1, \text{ следи } x_i(t) = e^{-t}.$$

Коначно добија се јединични импулсни одзив за дату преносну функцију, слика 4.7. (impulse response):

$$x_i(t) = e^{-t}.$$

Matlab code :

```
(
>> I = [1];
>> U = [1 1];
>> W = tf(I,U)
ltiview({'step','impulse'}, W)
returns
)
```



Слика 4.7. Графици јединичног одскочног одзива система (*step response*) и јединичног импулсног одзива система (*impulse response*) за дату преносну функцију $W(s)$

Задатак 3.

За систем дефинисан преносном функцијом, која је добијена решењем задатка 4. у поглављу 3.:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{25}{s^2 + 5s},$$

и за све почетне услове једнаке нули, одредити:

- а) јединични одскочни одзив;
- б) јединични импулсни одзив.

Решење:

Преносна функција је дефинисан изразом:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}.$$

Овај израз се може написати и као:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Заменом задатком дате преносне функције у последњи израз, добија се:

$$X_i(s) = \frac{25}{s^2 + 5s} \cdot X_u(s).$$

а)

За добијање одговарајућег јединичног одскочног одзива на улаз система доводи се јединични одскочни сигнал $h(t)$, који се на основу табеле 1., редни број 3. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}$. Заменом уместо $X_u(s)$ у претходној једначини добија се :

$$X_i(s) = \frac{25}{s^2 + 5s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{25}{s^2(s + 5)}.$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација, према табели 1., под редним бројем 18., која гласи:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s + a)}\right] = \frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at}),$$

заменом за карактеристичну једначину где је $a = 5$, добија се :

$$x_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \frac{25}{25} \cdot (5t - 1 + e^{-5t}) = (5t - 1 + e^{-5t}).$$

Коначно добија се јединични одскочни одзив за дату преносну функцију, слика 4.8. (step response):

$$x_i(t) = 5t - 1 + e^{-5t}.$$

б)

За добијање одговарајућег јединичног импулсног одзива доводи се јединични импулсни сигнал $\delta(t)$ -Диракова функција, који се на основу табеле 1., редни број 1. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Заменом уместо $X_u(s)$ добија се:

$$X_i(s) = \frac{25}{s(s + 5)} \cdot 1 = \frac{25}{s(s + 5)}.$$

На последњи израз се примењује инверзна Лапласова трансформација.

За карактеристичну функцију $X_i(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$\mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{25}{s(s + 5)}\right] = 25 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s + 5)}\right] \text{ према Т1.-8, и } a = 5, \text{ следи}$$

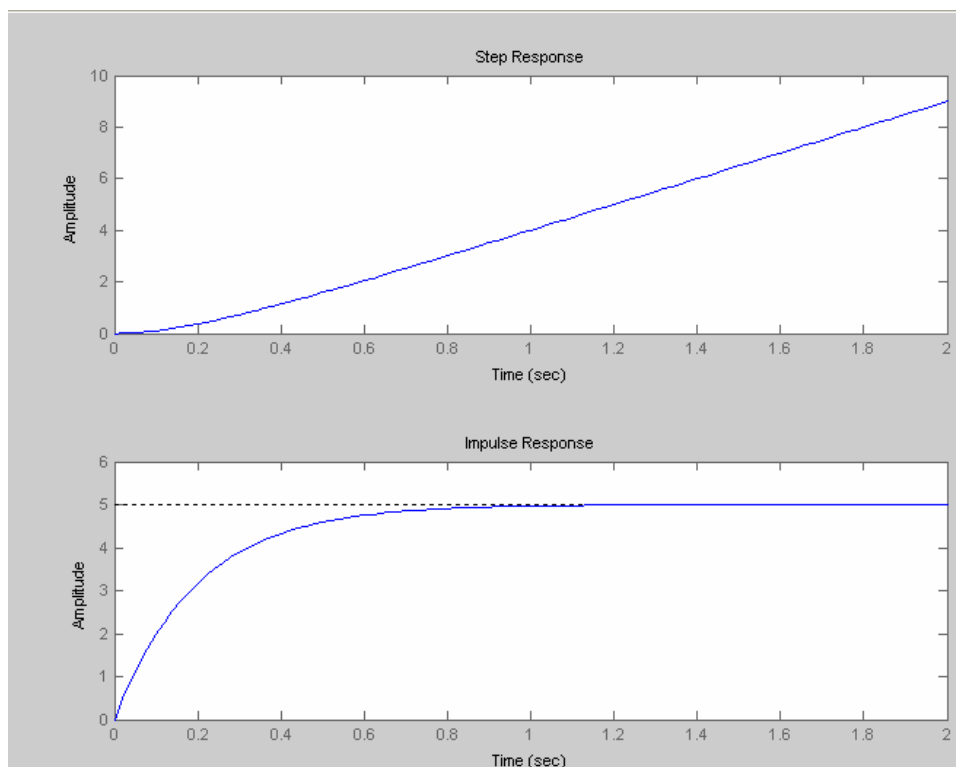
$$x_i(t) = \frac{25}{5} \cdot (1 - e^{-5t}) = 5 \cdot (1 - e^{-5t}).$$

Коначно добија се јединични импулсни одзив за дату преносну функцију, слика 4.8. (impulse response):

$$x_i(t) = 5 \cdot (1 - e^{-5t}).$$

Matlab code :

```
( >> I=[25];  
>> U=[1 5 0];  
>> W = tf(I,U)  
ltiview({'step';'impulse'}, W)  
returns )
```



Слика 4.8. Графици јединичног одскочног одзива система (*step response*) и јединичног импулсног одзива система (*impulse response*) за дату преносну функцију $W(s)$

Задатак 4.

За систем дефинисан преносном функцијом:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{1}{(s+2)(s+4)},$$

и за све почетне услове једнаке нули, одредити:

- а) јединични одскочни одзив;
- б) јединични импулсни одзив.

Решење:

Преносна функција је дефинисан изразом:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)}.$$

Овај израз се може написати и као:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Заменом задатком дате преносне функције у последњи израз, добија се:

$$X_i(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \cdot X_u(s).$$

а)

За добијање одговарајућег јединичног одскочног одзива на улаз система доводи се јединични одскочни сигнал $h(t)$, који се на основу табеле 1., редни број 3. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}$. Заменом уместо $X_u(s)$ у претходној једначини добија се :

$$X_i(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}.$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4}, \\ F(s) &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+4} = \frac{K_1(s+2)(s+4) + K_2s(s+4) + K_3s(s+2)}{s(s+2)(s+4)} = \\ &= \frac{K_1(s^2 + 4s + 2s + 8) + K_2(s^2 + 4s) + K_3(s^2 + 2s)}{s(s+2)(s+4)} = \\ &= \frac{K_1s^2 + 6K_1s + 8K_1 + K_2s^2 + 4K_2s + K_3s^2 + 2K_3s}{s(s+2)(s+4)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (6K_1 + 4K_2 + 2K_3)s + 8K_1}{s(s+2)(s+4)} \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2 + K_3)s^2 + (6K_1 + 4K_2 + 2K_3)s + 8K_1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се

$$\text{Уз } s^2: K_1 + K_2 + K_3 = 0;$$

$$\text{Уз } s: 6K_1 + 4K_2 + 2K_3 = 0;$$

$$\text{Уз слободан члан: } 8K_1 = 1.$$

Систем једначина се решава уз помоћ Крамеровог правила:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= 0 \\ 6K_1 + 4K_2 + 2K_3 &= 0 \\ 8K_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Delta K = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-16) - 32 = +16 - 32 = -16$$

$$\Delta K_1 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta K_2 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 0 + 6 = -2 + 6 = 4$$

$$\Delta K_3 = \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$K_1 = \frac{\Delta K_1}{\Delta K} = \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8}; \quad K_2 = \frac{\Delta K_2}{\Delta K} = \frac{4}{-16} = -\frac{1}{4}; \quad K_3 = \frac{\Delta K_3}{\Delta K} = \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8}$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s+4}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s+4} = H(s) + R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) + R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = h(t) + r_1(t) + r_2(t)$$

За прву карактеристичну функцију $H(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{8} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] \text{ према Т.1-3., следи: } h(t) = \frac{1}{8}.$$

За другу карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2}\right] = -\frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 2, \text{ следи:}$$

$$r_1(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-2t}$$

За трећу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s+4}\right] = \frac{1}{8} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \text{ према Т.1-7. и } a=4, \text{ следи: } r_2(t) = \frac{1}{8} \cdot e^{-4t}.$$

Коначно добија се јединични одскочни одзив за дату преносну функцију, слика 4.9. (step response):

$$x_i(t) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2t} + \frac{1}{8} e^{-4t}.$$

б)

За добијање одговарајућег јединичног импулсног одзива доводи се јединични импулсни сигнал $\delta(t)$ -Диракова функција, који се на основу табеле 1., редни број 1. Лапласовом трансформацијом преводи из временског у комплексни домен $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$. Заменом уместо $X_u(s)$ добија се:

$$X_i(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} \cdot 1 = \frac{1}{(s+2)(s+4)}.$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација.

Да би се на основу комплексног лика добила функција у временском домену потребно је дати израз написати у следећем облику:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+4}, \\ F(s) &= \frac{K_1}{s+2} + \frac{K_2}{s+4} = \frac{K_1(s+4) + K_2(s+2)}{(s+2)(s+4)} = \frac{K_1s + 4K_1 + K_2s + 2K_2}{(s+2)(s+4)} = \\ &= \frac{(K_1 + K_2)s + (4K_1 + 2K_2)}{(s+2)(s+4)}. \end{aligned}$$

Добијени израз се изједначава са задатом функцијом:

$$\frac{(K_1 + K_2)s + (4K_1 + 2K_2)}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{(s+1)(s+4)}.$$

Изједначавањем бројиоца са обе стране једнакости, добија се:

$$\text{Уз } s: K_1 + K_2 = 0,$$

$$\text{Уз слободан члан: } 4K_1 + 2K_2 = 1.$$

Систем једначина се решава методом смене:

$$\begin{array}{l|l} K_1 + K_2 = 0 & K_1 = -K_2 \\ 4K_1 + 2K_2 = 1 & -4K_2 + 2K_2 = 1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2} \\ K_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

На тај начин задата функција се изражава следећим збиром:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+4}.$$

На основу табела 2., под редним бројем 1., комплексни лик полазне функције може изразити збиром:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+4} = R_1(s) + R_2(s).$$

На ову једнакост, затим, примењује се инверзна Лапласова трансформација:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s) + R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = r_1(t) + r_2(t).$$

За прву карактеристичну функцију $R_1(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_1(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+2}\right] = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 2, \text{ следи: } r_1(t) = \frac{1}{2} e^{-2t}.$$

За другу карактеристичну функцију $R_2(s)$, инверзна Лапласова трансформација:

$$r_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[R_2(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2} \frac{1}{s+4}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \text{ према Т.1-7. и } a = 4, \text{ следи:}$$

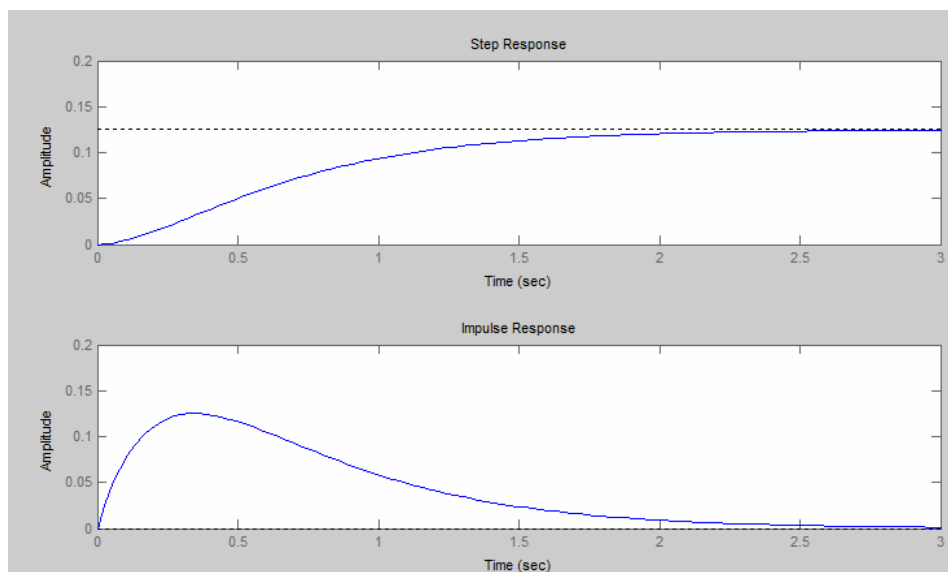
$$r_2(t) = -\frac{1}{2} e^{-4t}.$$

Коначно добија се јединични импулсни одзив за дату преносну функцију, слика 4.9. (impulse response):

$$x_i(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-4t}).$$

Matlab code :

```
(>> I = [1];
>> U = [1 6 8];
>> W = tf(I,U)
ltiview({'step','impulse'}, W)
returns)
```



Слика 4.9. Графици јединичног одскочног одзива система (step response) и јединичног импулсног одзива система (impulse response) за дату преносну функцију $W(s)$

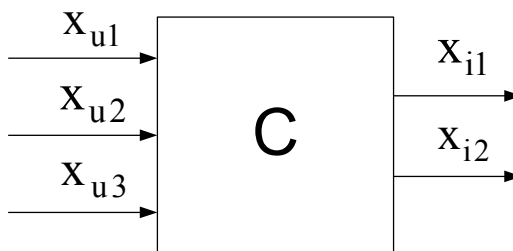
5. ПРИКАЗИВАЊЕ СИСТЕМА

Појам систем се уводи у делу постојећег или планираног међусобног повезивања елемената или различитих процеса које треба спознати и проучити. Начини приказивања система су:

- графичко приказивање;
- приказивање система структурним дијаграмом;
- приказивање система блок дијаграмом;
- приказивање (трансформације) система матрицом прелаза и
- кинематски приказ система.

4.1. Структурни дијаграм система

Дијаграм система, који је расчлањен, детаљан, тако да је симболички приказана структура система, која показује све подсистеме и њихова међусобна дејства, назива се структурни дијаграм система као на слици 5.1.



Слика 5.1. Приказ система структурним дијаграмом

5.2. Блок дијаграм система

Блок дијаграм система садржи све потребне информације о структури система коју садржи његов структурни дијаграм, и све информације о динамичким особинама система које садржи његова једначина понашања.

Дефиниција: Блок дијаграм система је његов структурни дијаграм у коме је сваки подсистем представљен својом преносном матрицом, а свака величина својом Лапласовом трансформацијом.

Блок дијаграм обједињује информације о систему које се о њему добијају из његовог структурног дијаграма и једначине понашања.

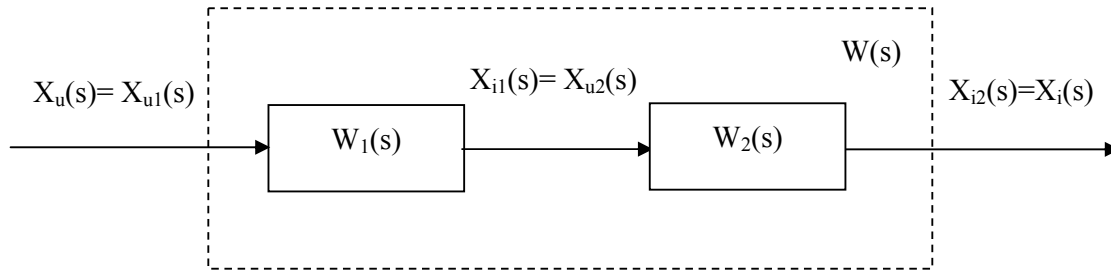
При решавању задатака израчунавање преносне функције сложених система користи се таблица 3. (налази се у додатку), у којој се налазе правила алгебре блок дијаграма, тј. трансформација блок дијаграма у његов еквивалентни дијаграм, погоднији за даљу анализу и проналажење преносне функције целокупног система.

5.2.1. Еквивалентни дијаграми основних спрега

Два блок дијаграма су еквивалентна ако и само ако су једначине понашања добијене из њих међусобно једнаке

- **редна спрега**

Редна спрега два подсистема са преносним функцијама $W_1(s)$ и $W_2(s)$, приказана је на слици 5.2.



Слика 5.2. Блок дијаграм редне спреге

За одређивање еквивалентног блок дијаграма за приказан блок дијаграм редне спреге, полази се од дефиниције преносне функције где се излаз неког система (при нултим почетним условима) изражава као производ преносне функције тог система и улаза који на њега делује:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

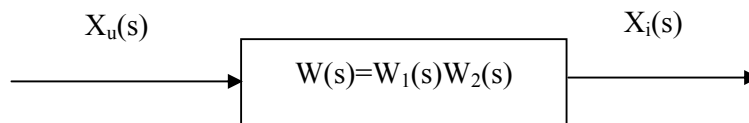
Са слике, за дати блок дијаграм редне спреге, даље следи:

$$\left. \begin{array}{l} X_u(s) = X_{u1}(s); \\ X_{i1}(s) = X_{u2}(s); \\ X_{i2}(s) = X_i(s); \\ X_{i1}(s) = W_1(s)X_{u1}(s) = W_1(s)X_u(s); \\ X_{i2}(s) = W_2(s)X_{u2}(s); \end{array} \right\} \Rightarrow X_i(s) = W_2(s)W_1(s)X_u(s) \Rightarrow W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = W_2(s)W_1(s)$$

Преносна функција редне спреге биће:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = W_1(s)W_2(s).$$

Еквивалентни блок дијаграм редне спреге приказан је на слици 5.3.



Слика 5.3. Еквивалентни блок дијаграм датом блок дијаграму редне спреге

Уколико се преносна функција посматра у виду преносне матрице, треба обратити пажњу да је редослед множења преносних матрица подсистема супротан смеру преноса сигнала.

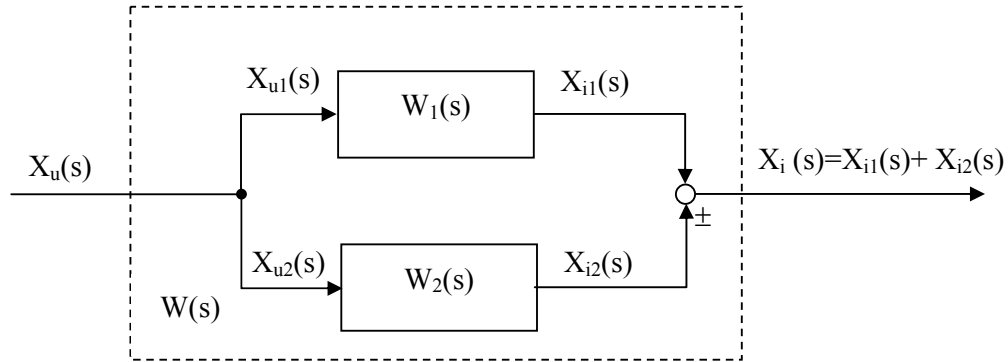
$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = W_2(s)W_1(s).$$

Еквивалентна преносна функција система за n редно спрегнутих подсистема биће:

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i.$$

- **паралелна спрега**

Паралелна спрега два подсистема са преносним функцијама $W_1(s)$ и $W_2(s)$, приказана је на слици 5.4.



Слика 5.4. Блок дијаграм паралелне спреге

За одређивање еквивалентног блок дијаграма за приказан блок дијаграм паралелне спреге, полази се од дефиниције преносне функције где се излаз неког система (при нултим почетним условима) изражава као производ преносне функције тог система и улаза који на њега делује:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

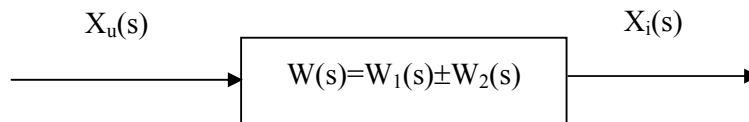
Са слике, за дати блок дијаграм паралелне спреге, даље следи:

$$\left. \begin{aligned} X_u(s) &= X_{u1}(s) = X_{u2}(s); \\ X_i(s) &= X_{i1}(s) \pm X_{i2}(s); \\ X_{i1}(s) &= W_1(s)X_{u1}(s) = W_1(s)X_u(s); \\ X_{i2}(s) &= W_2(s)X_{u2}(s) = W_2(s)X_u(s); \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_i(s) = W_1(s)X_u(s) \pm W_2(s)X_u(s) \Rightarrow W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = W_1(s) \pm W_2(s)$$

Преносна функција паралелне спреге биће:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = W_1(s) \pm W_2(s).$$

Еквивалентни блок дијаграм паралелне спреге приказан је на слици 5.5.



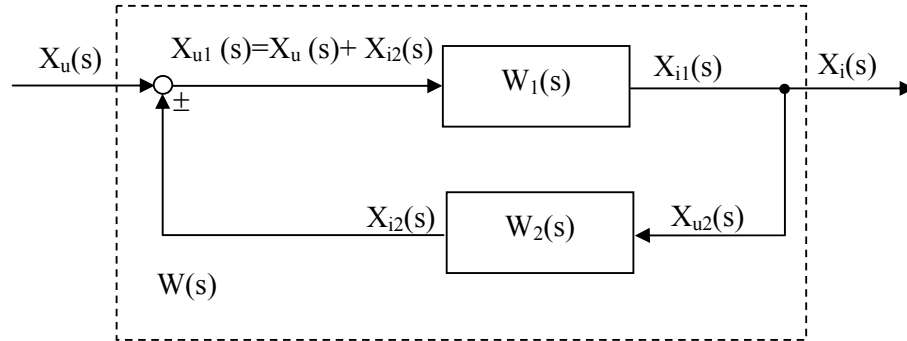
Слика 5.5. Еквивалентни блок дијаграм датом блок дијаграму паралелне спреге

Еквивалентна преносна функција система за n паралелно спрегнутих подсистема и за све позитивне улазе у дискриминатор ($x_{ik}; k = 2, 3, \dots, n$; су са позитивним предзнаком) биће:

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i.$$

- **повратна спрега**

Повратна спрега два подсистема са преносним функцијама $W_1(s)$ (преносна функција директне гране) и $W_2(s)$ (преносна функција повратне гране), приказана је на слици 5.6.



Слика 5.6. Блок дијаграм повратне спреге

За одређивање еквивалентног блок дијаграма за приказан блок дијаграм повратне спреге, полази се од дефиниције преносне функције где се излаз неког система (при нултим почетним условима) изражава као производ преносне функције тог система и улаза који на њега делује:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Са слике, за дати блок дијаграм повратне спреге, даље следи:

$$\begin{aligned} X_{u1}(s) &= X_u(s) \pm X_{i2}(s); \\ X_i(s) &= X_{i1}(s) = X_{u2}(s); \\ X_{i1}(s) &= W_1(s)X_{u1}(s) = W_1(s)(X_u(s) \pm X_{i2}(s)); \\ X_{i2}(s) &= W_2(s)X_{u2}(s) = W_2(s)X_i(s); \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\Rightarrow X_i(s) = W_1(s)X_u(s) \pm W_1(s)W_2(s)X_i(s) \\ &X_i(s) \mp W_1(s)W_2(s)X_i(s) = W_1(s)X_u(s) \\ &X_i(s) \cdot (1 \mp W_1(s)W_2(s)) = W_1(s)X_u(s) \end{aligned} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}$$

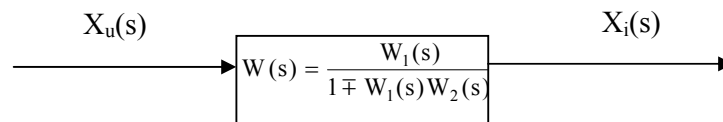
Преносна функција повратне спреге биће:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}.$$

Производ $W_1(s)W_2(s)$ представља функцију повратног преноса $W_p(s)$ која има главну улогу у алгебарском одређивању стабилности неког система. Еквивалентна функција спрегнутог преноса се може изразити и као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{W_{\text{dir}}(s)}{1 \mp W_p(s)}$$

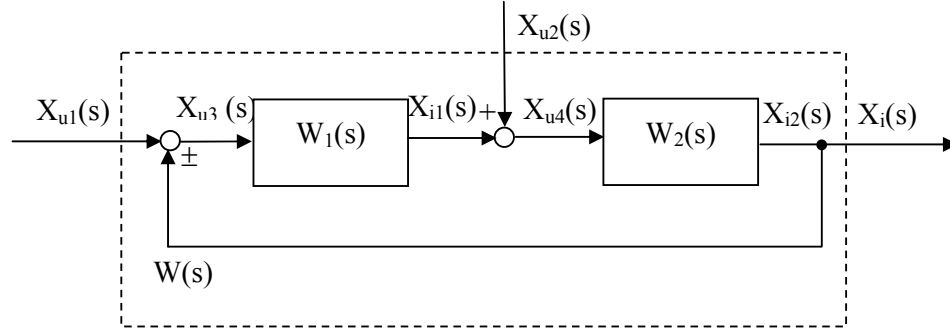
Еквивалентни блок дијаграм повратне спреге приказан је на слици 5.7.



Слика 5.7. Еквивалентни блок дијаграм датом блок дијаграму повратне спреге

- **спрега система са више улаза и излаза**

Када систем има више улазних и излазних величина, потребно је тачно дефинисати о којим улазним и којим излазним величинама се говори. Систем са два улаза и једним излазом приказан је на слици 5.8., самим тим могу да се дефинишу две преносне функције система: у односу на улаз $X_{u1}(s)$ преносна функција $W_{x_{u1}}(s)$ и у односу на улаз $X_{u2}(s)$ преносна функција $W_{x_{u2}}(s)$.



Слика 5.8. Блок дијаграм спреге са два улаза и једним излазом

За одређивање еквивалентног блок дијаграма за приказан блок дијаграм спреге са два улаза и једним излазом, полази се од дефиниције преносне функције где се излаз неког система (при нултим почетним условима) изражава као производ преносне функције тог система и улаза који на њега делује:

$$X_i(s) = W(s) \cdot X_u(s).$$

Са слике, за дати блок дијаграм повратне спреге, даље следи:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 X_{u3}(s) &= X_{u1}(s) \pm X_{i2}(s); \\
 X_{u4}(s) &= X_{i1}(s) + X_{u2}(s); \\
 X_i(s) &= X_{i2}(s); \\
 X_{i1}(s) &= W_1(s)X_{u3}(s) = W_1(s)(X_{u1}(s) \pm X_{i2}(s)); \\
 X_{i2}(s) &= W_2(s)X_{u4}(s) = W_2(s)(X_{i1}(s) + X_{u2}(s));
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow X_i(s) = W_2(s)(W_1(s)X_{u1}(s) \pm W_1(s)X_i(s) + X_{u2}(s)) \quad \Rightarrow \\
 & \quad X_i(s) = W_2(s)W_1(s)X_{u1}(s) \pm W_2(s)W_1(s)X_i(s) + W_2(s)X_{u2}(s) \\
 & \quad X_i(s) \mp W_2(s)W_1(s)X_i(s) = W_2(s)W_1(s)X_{u1}(s) + W_2(s)X_{u2}(s) \\
 & \quad X_i(s) \cdot (1 \mp W_2(s)W_1(s)) = W_2(s)W_1(s)X_{u1}(s) + W_2(s)X_{u2}(s) \\
 & \Rightarrow W_{u1}(s) = \frac{X_i(s)}{X_{u1}(s)} = \frac{W_2(s)W_1(s)}{1 \mp W_2(s)W_1(s)}; \\
 & \Rightarrow W_{u2}(s) = \frac{X_i(s)}{X_{u2}(s)} = \frac{W_2(s)}{1 \mp W_2(s)W_1(s)}.
 \end{aligned}$$

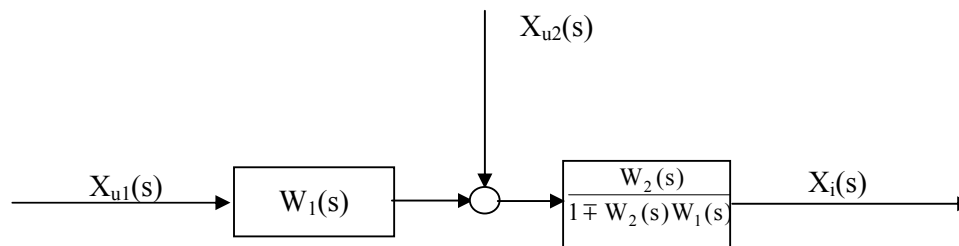
Преносна функција спреге у односу на улаз $X_{u1}(s)$ биће:

$$W_{u1}(s) = \frac{X_i(s)}{X_{u1}(s)} = \frac{W_2(s)W_1(s)}{1 \mp W_2(s)W_1(s)}.$$

Преносна функција спреге у односу на улаз $X_{u2}(s)$ биће:

$$W_{u2}(s) = \frac{X_i(s)}{X_{u2}(s)} = \frac{W_2(s)}{1 \mp W_2(s)W_1(s)}.$$

Еквивалентни блок дијаграм повратне спреге приказан је на слици 5.9.

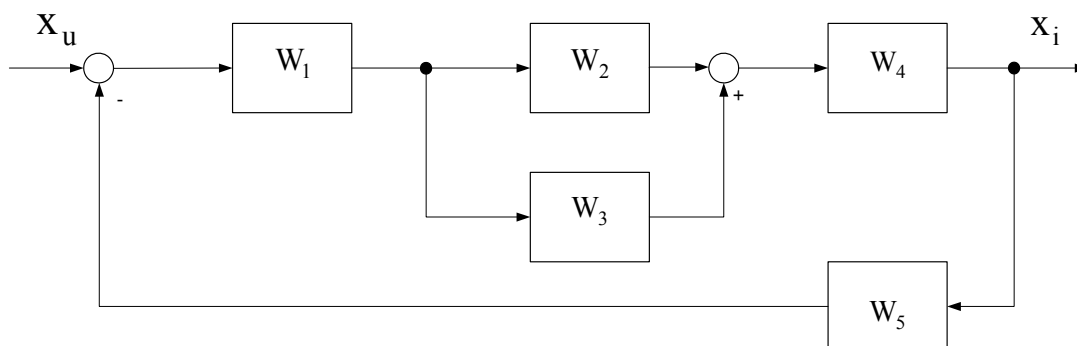


Слика 5.9. Еквивалентни блок дијаграм датом блок дијаграму спреге са два улаза и једним излазом

5.2.2. Алгебра блок дијаграма-одређивање функције спрегнутог преноса (примери решених задатака)

Задатак 1.

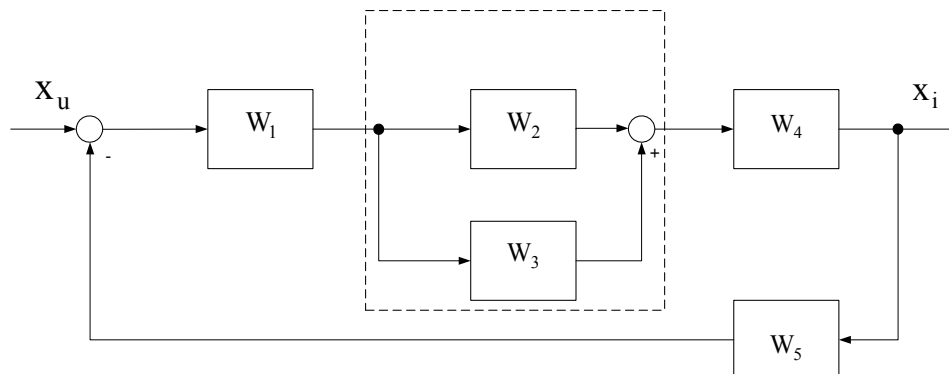
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.10:



Слика 5.10. Блок дијаграм

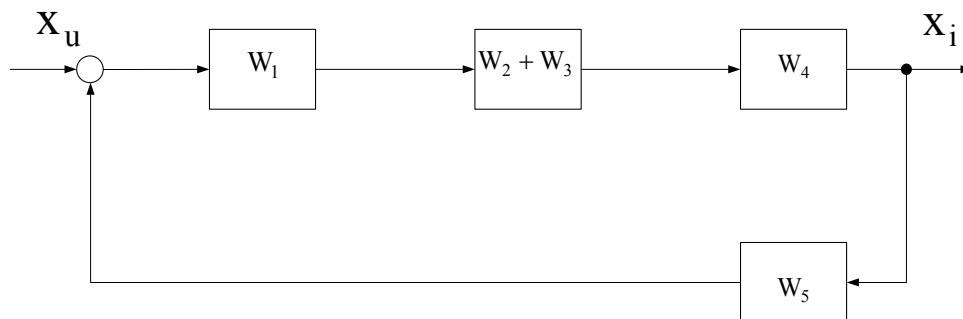
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак, користе се правила дата у табели 3. (налази се у додатку). На обележени део, слика 5.11., примењује се правило 3. из табеле 3.



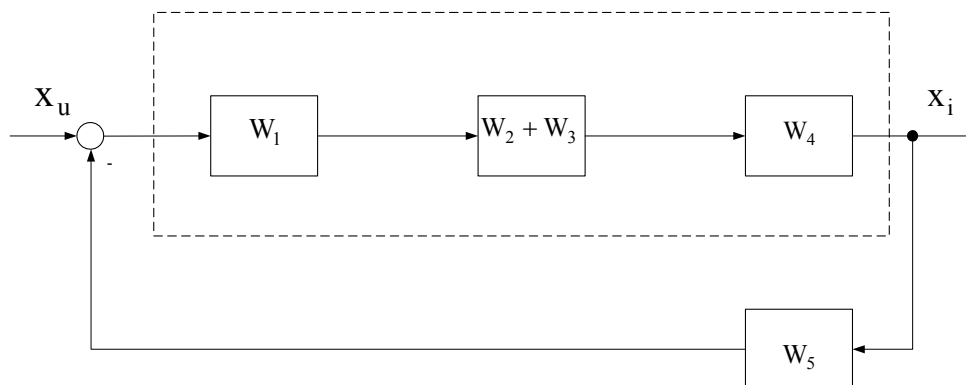
Слика 5.11.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.12:



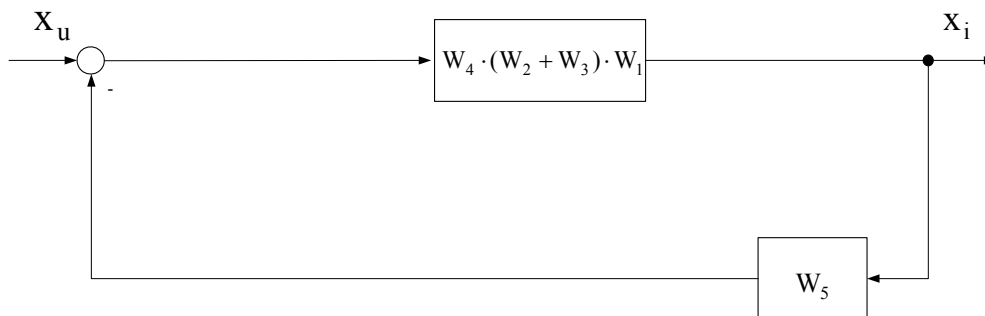
Слика 5.12.

На обележени део, слика 5.13., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



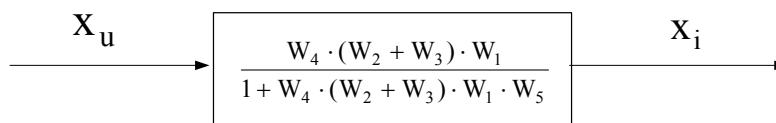
Слика 5.13.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.14:



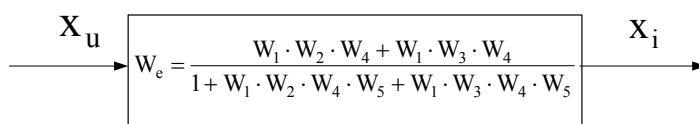
Слика 5.14.

На обележени део, слика 5.15., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



Слика 5.15.

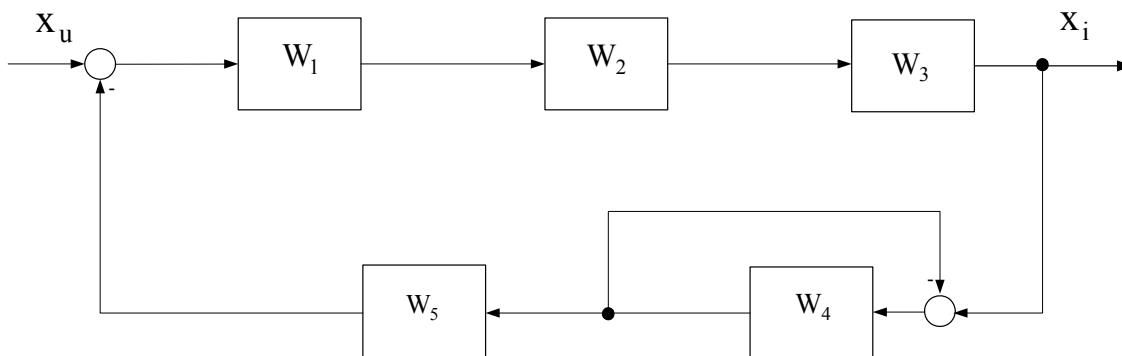
Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.16., за дати почетни блок дијаграм са одговарајућом функцијом спрегнутог преноса $W_e(s)$:



Слика 5.16.

Задатак 2.

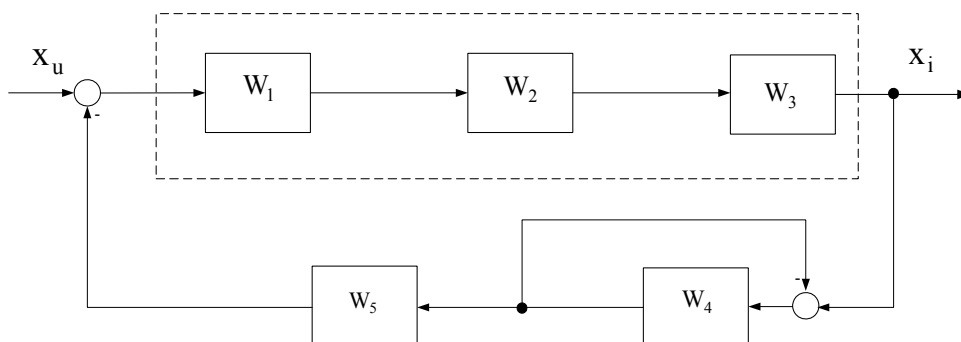
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.17:



Слика 5.17. Блок дијаграм

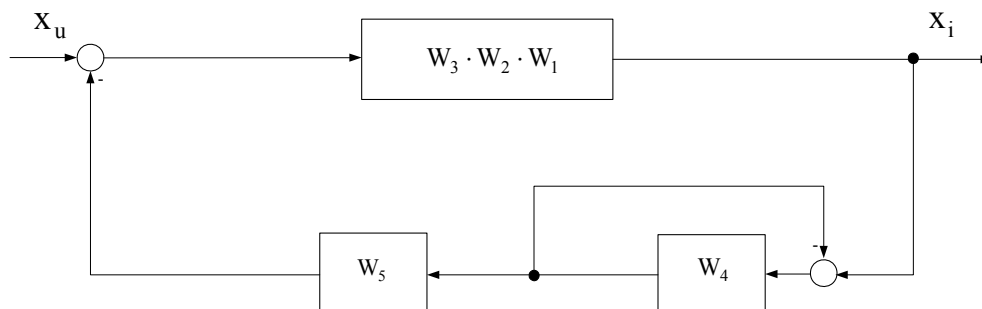
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак на обележени део, слика 5.18., примењује се правило 1. из табеле 3.



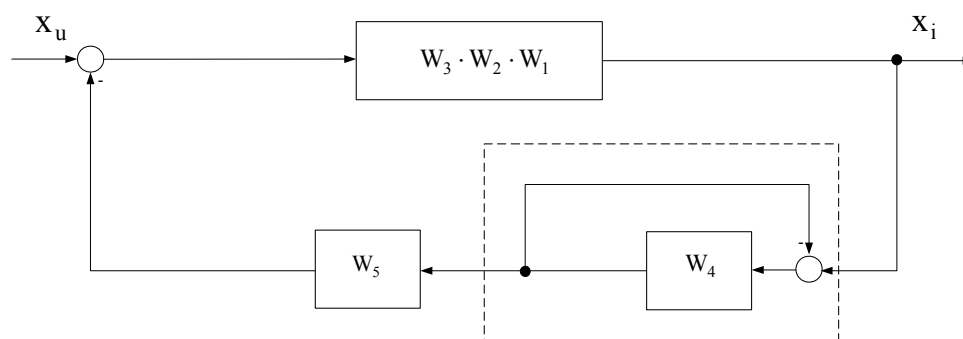
Слика 5.18.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.19:



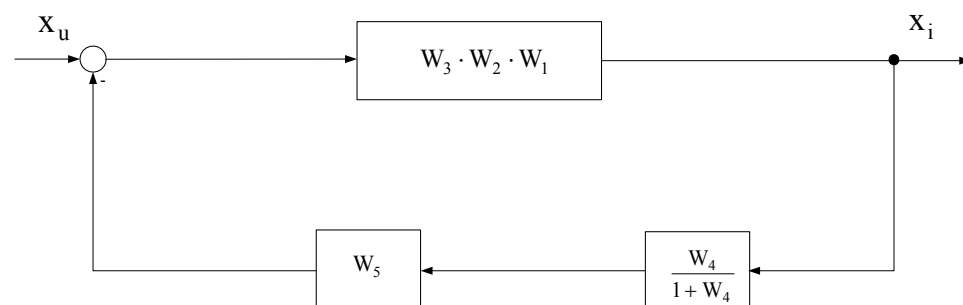
Слика 5.19.

На обележени део, слика 5.20., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



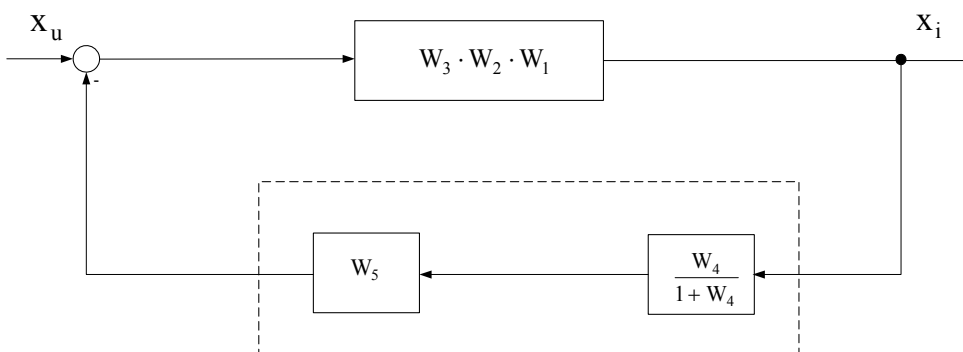
Слика 5.20.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.21:



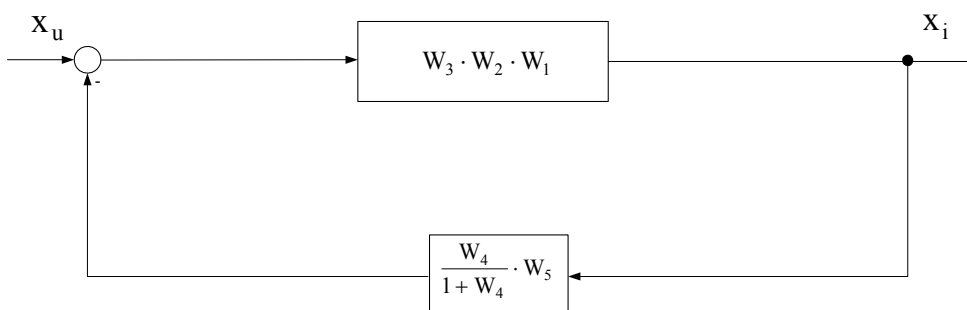
Слика 5.21.

На обележени део, слика 5.22., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



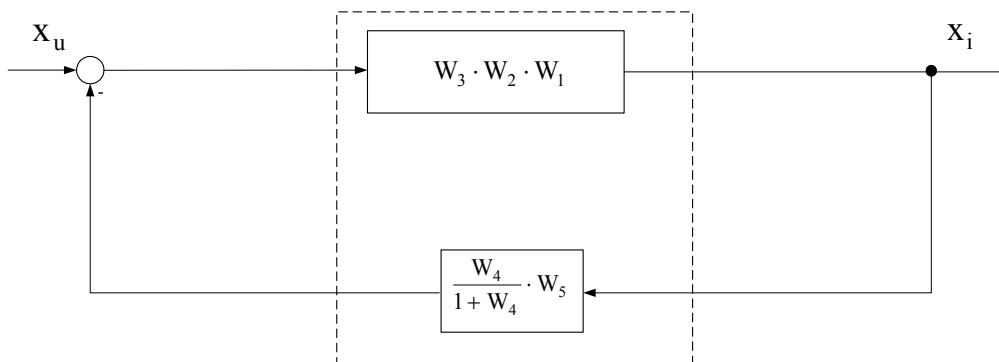
Слика 5.22.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.23:



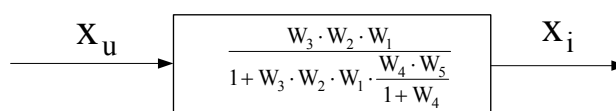
Слика 5.23.

На обележени део, слика 5.24., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



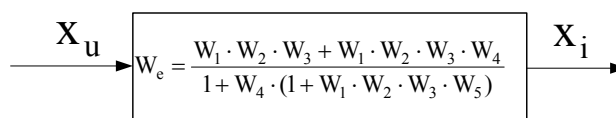
Слика 5.24.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.25:



Слика 5.25.

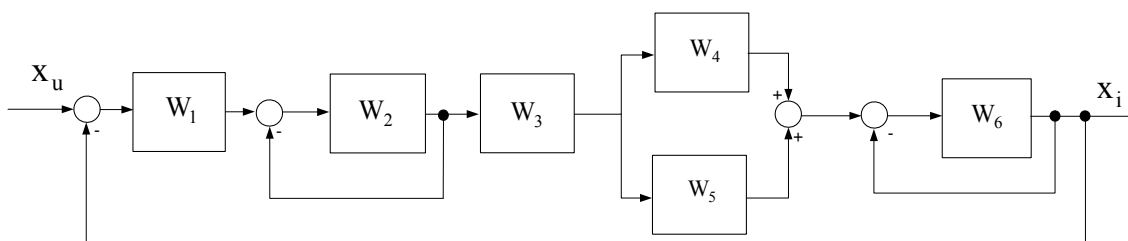
Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.26., за дати почетни блок дијаграм са одговарајућом функцијом спрегнутог преноса $W_e(s)$:



Слика 5.26.

Задатак 3.

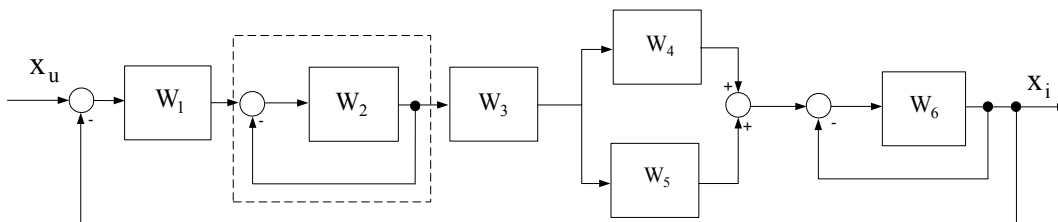
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.27:



Слика 5.27. Блок дијаграм

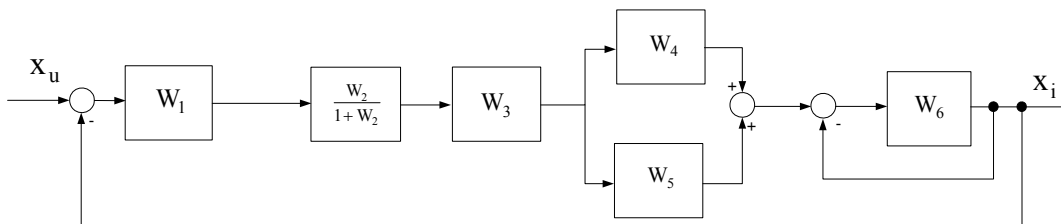
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак на обележени део, слика 5.28., примењује се правило 2. из табеле 3.



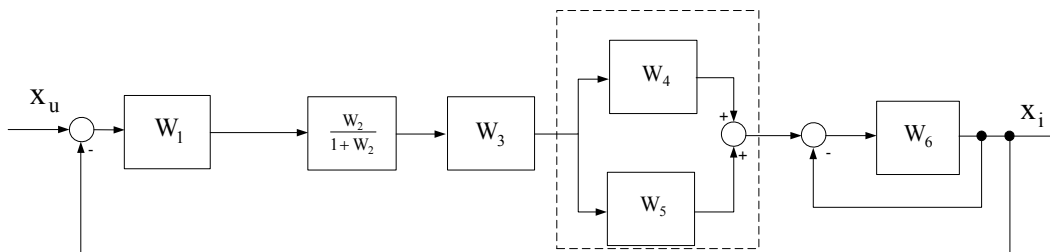
Слика 5.28.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.29:



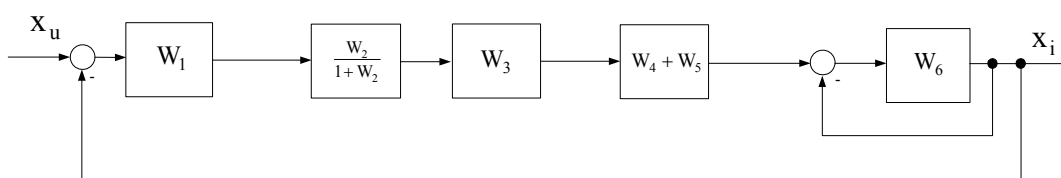
Слика 5.29.

На обележени део, слика 5.30., се даље примењује правило 3., из табеле 3.



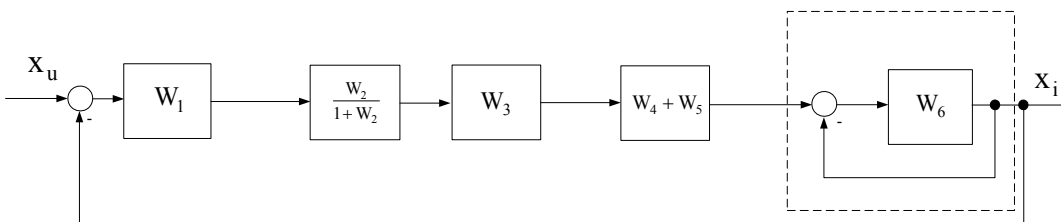
Слика 5.30.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.31:



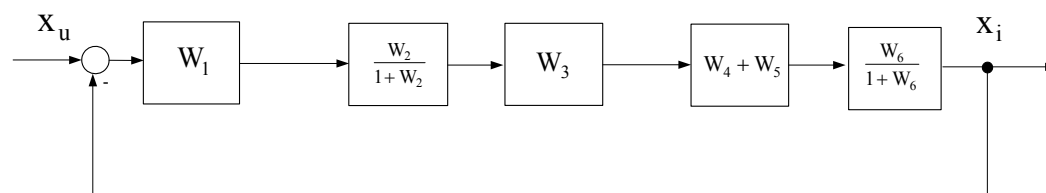
Слика 5.31.

На обележени део, слика 5.32., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



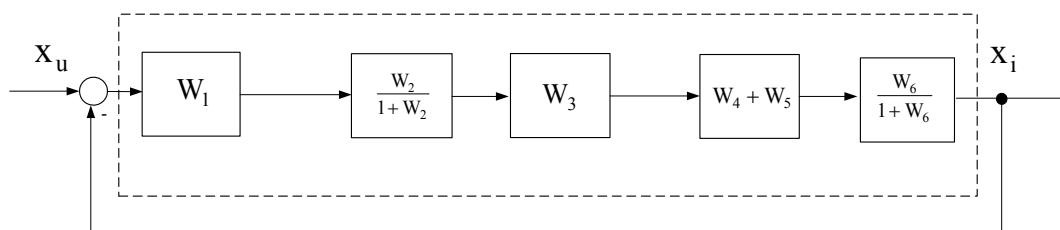
Слика 5.32.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.33:



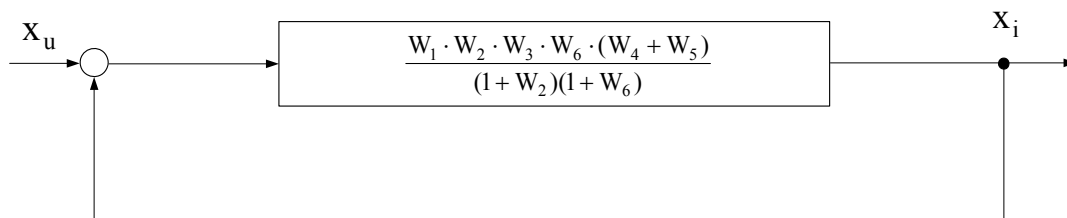
Слика 5.33.

На обележени део, слика 5.34., се даље примењује правило 1., из табеле 3.

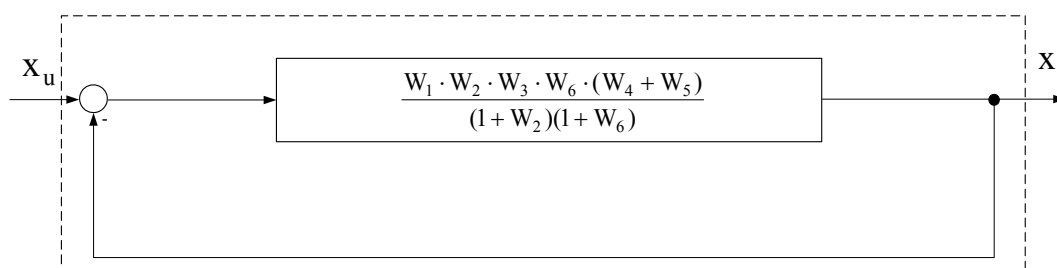


Слика 5.34.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.35:

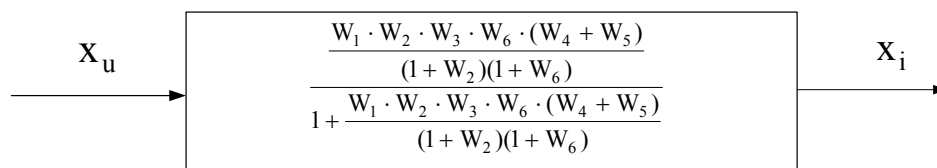


На обележени део, слика 5.36., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



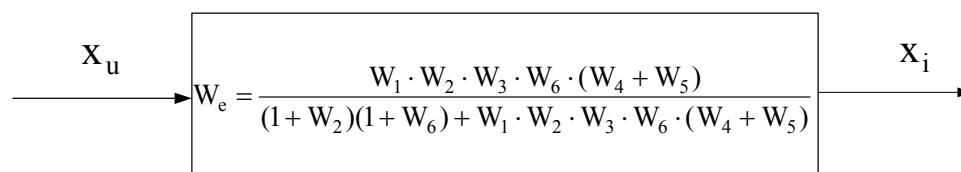
Слика 5.36.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.37:



Слика 5.37.

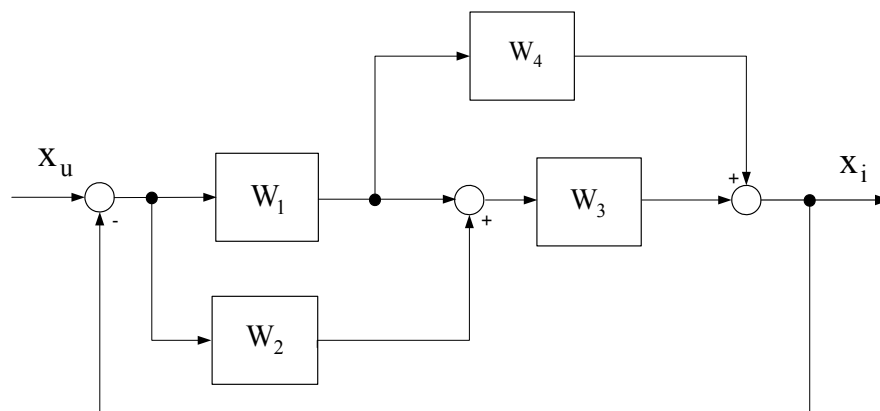
Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.38., за дати почетни блок дијаграм са одговарајућом функцијом спрегнутог преноса $W_e(s)$:



Слика 5.38.

Задатак 4.

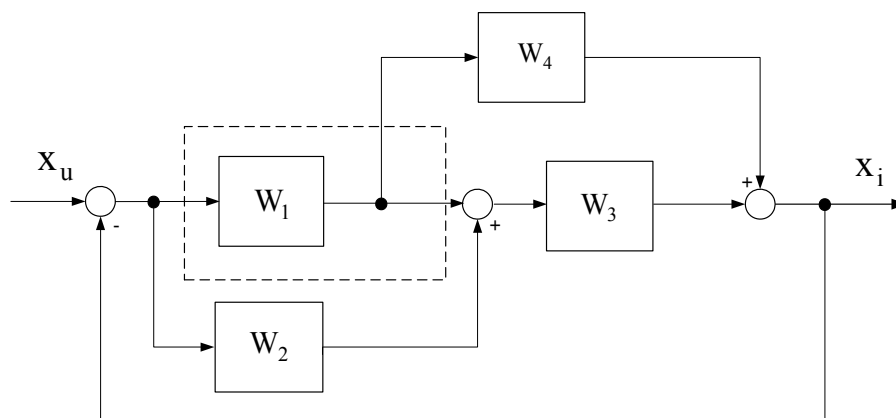
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.39:



Слика 5.39.Блок дијаграм

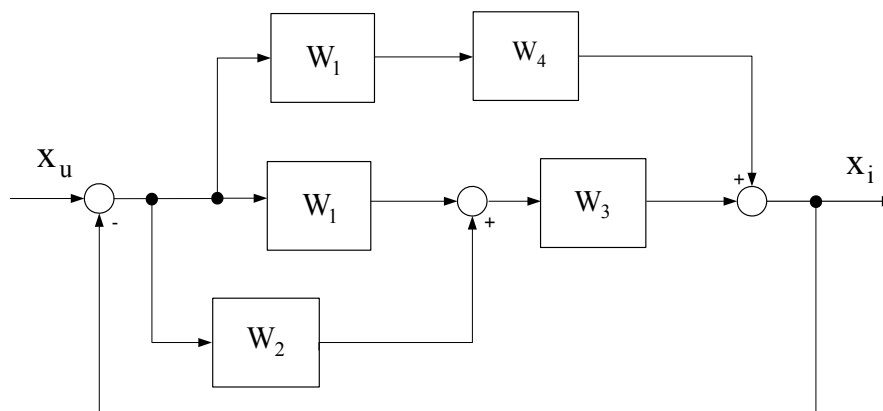
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак на обележени део, слика 5.40., примењује се правило 4. из табеле 3.



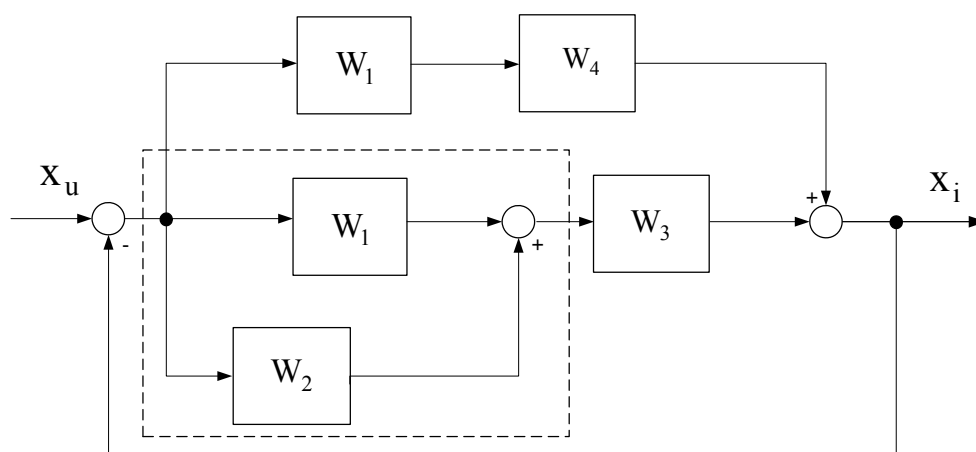
Слика 5.40.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.41:



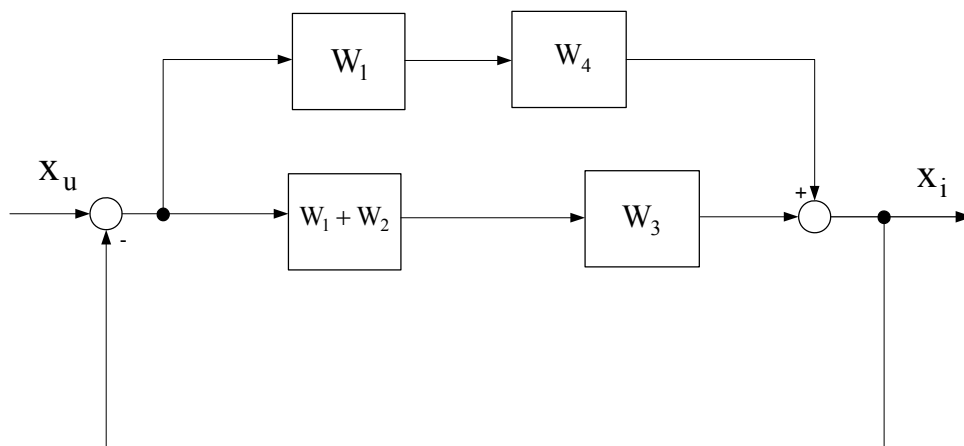
Слика 5.41.

На обележени део, слика 5.42., се даље примењује правило 3., из табеле 3.



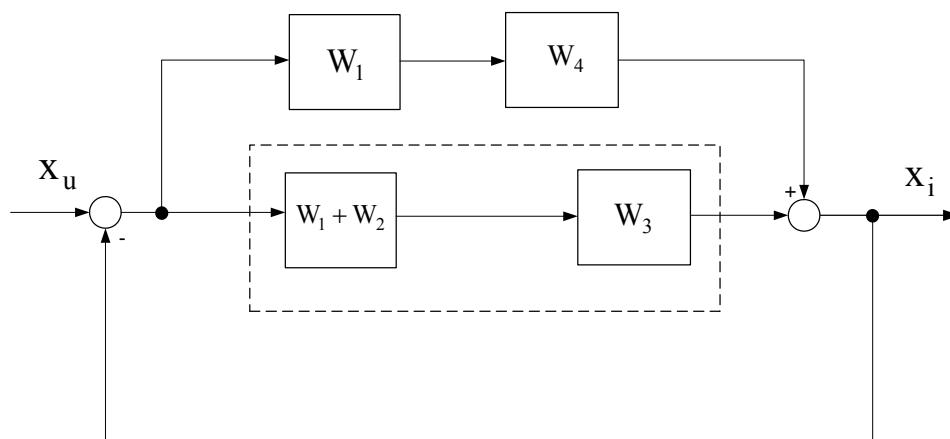
Слика 5.42.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.43:



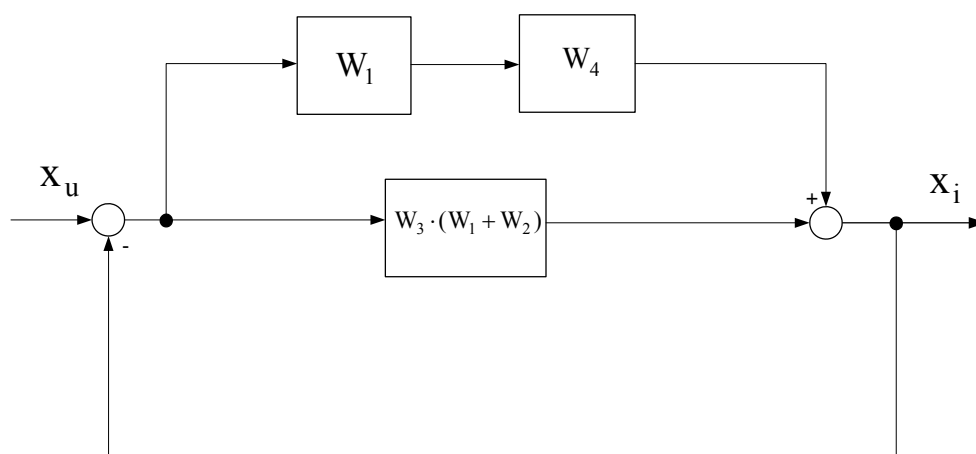
Слика 5.43.

На обележени део, слика 5.44., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



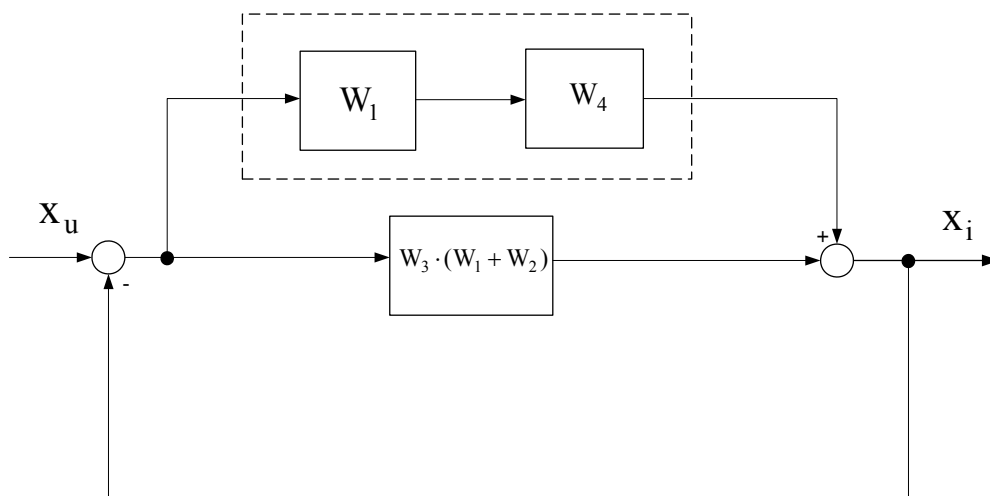
Слика 5.44.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.45:



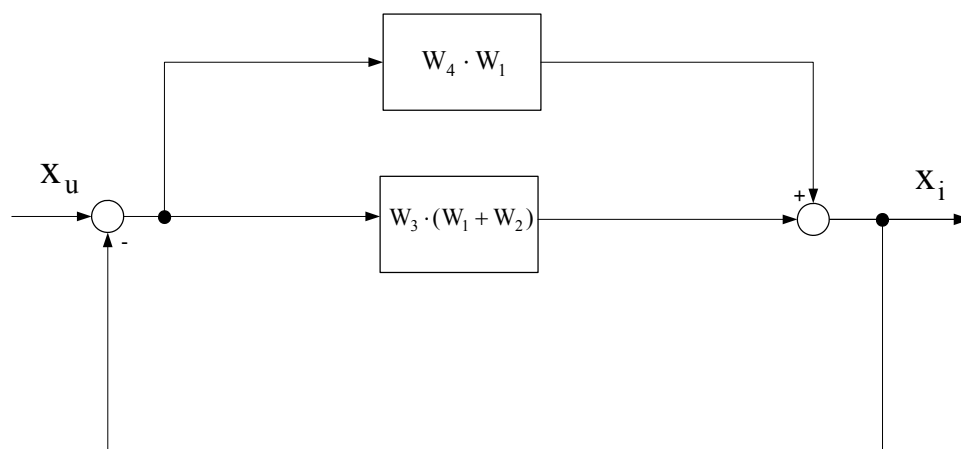
Слика 5.45.

На обележени део, слика 5.46., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



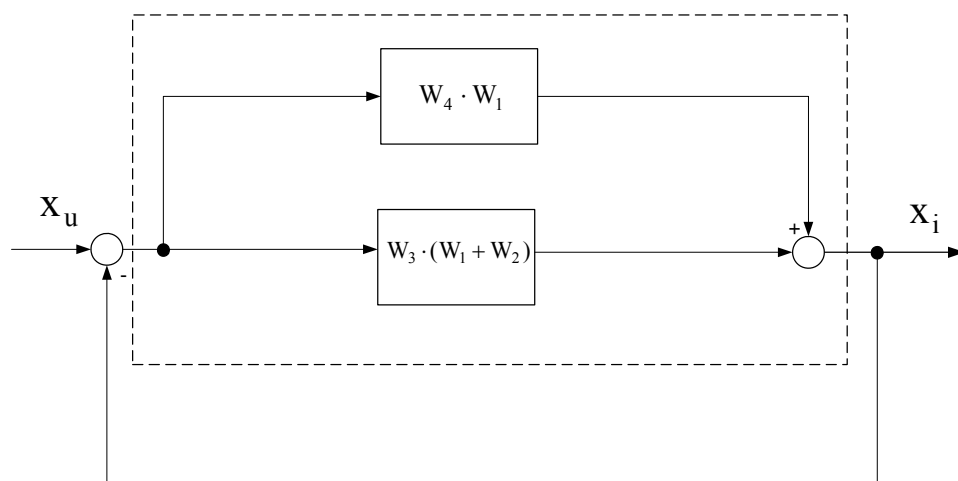
Слика 5.46.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.47:



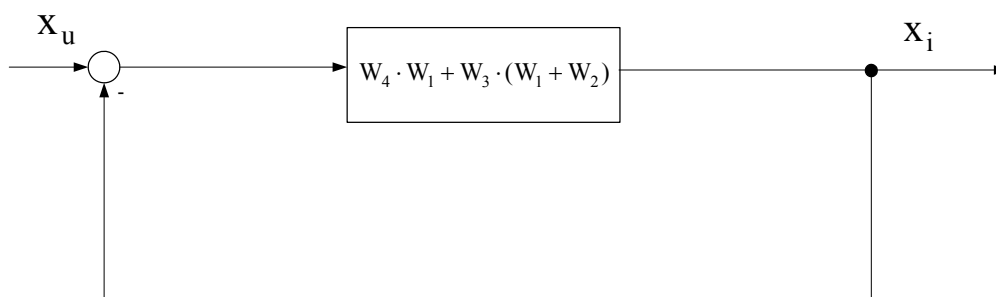
Слика 5.47.

На обележени део, слика 5.48., се даље примењује правило 3., из табеле 3.



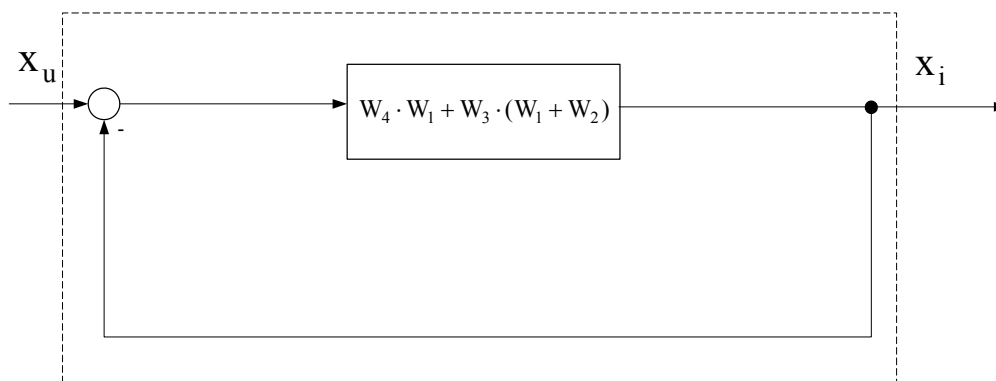
Слика 5.48.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.49:



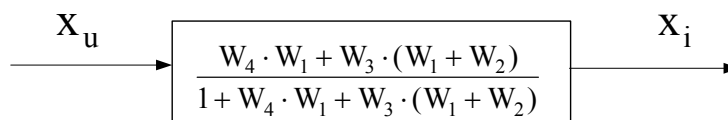
Слика 5.49.

На обележени део, слика 5.50., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



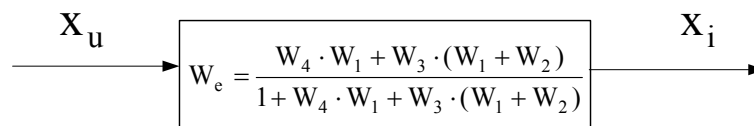
Слика 5.50.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.51:



Слика 5.51.

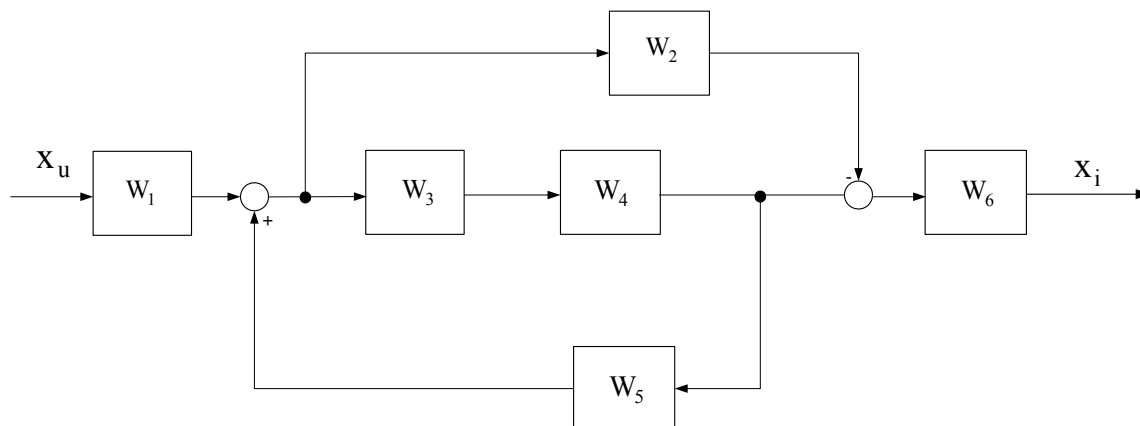
Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.52., за дати почетни блок дијаграм са одговарајућом функцијом спрегнутог преноса $W_e(s)$:



Слика 5.52.

Задатак 5.

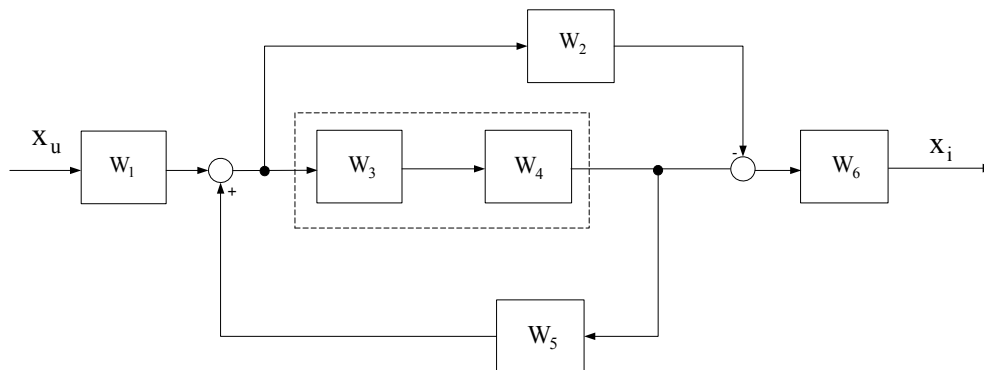
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.53:



Слика 5.53. Блок дијаграм

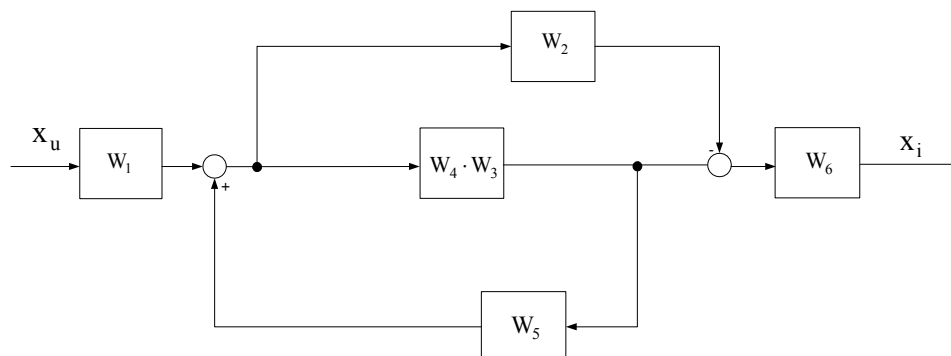
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак на обележени део, слика 5.54., примењује се правило 1. из табеле 3.



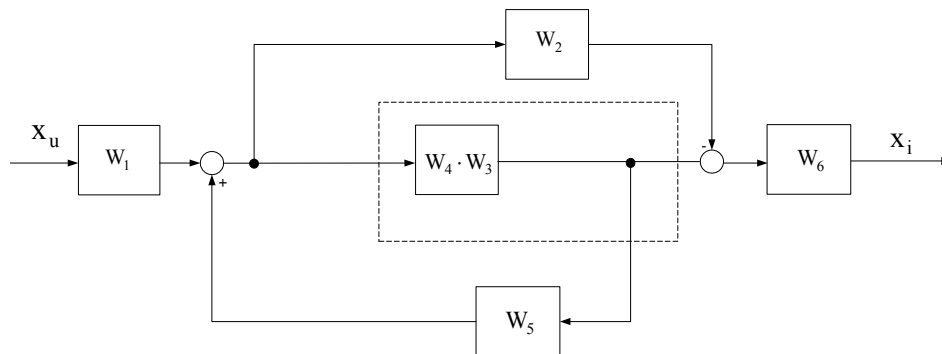
Слика 5.54.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.55:



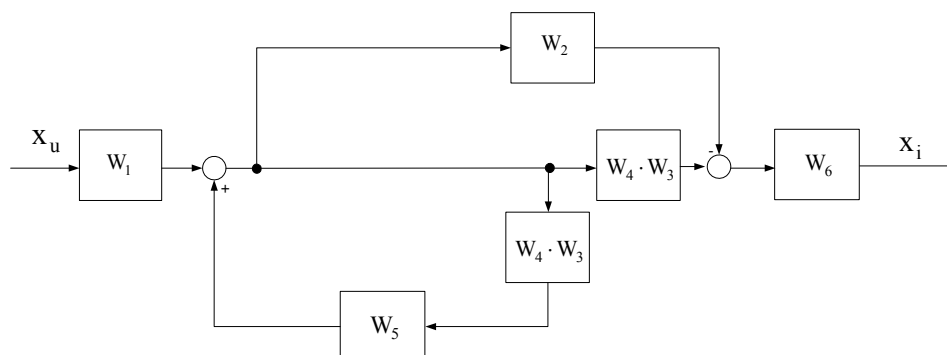
Слика 5.55.

На обележени део, слика 5.56., се даље примењује правило 9., из табеле 3.



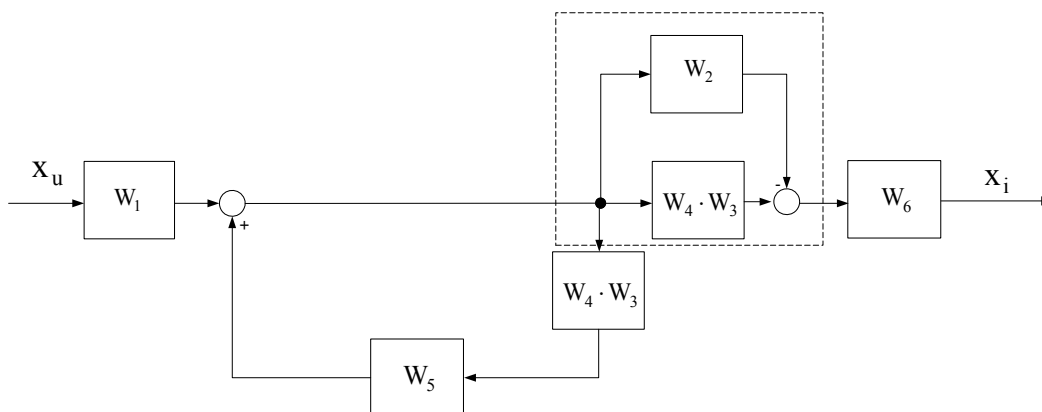
Слика 5.56.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.57:



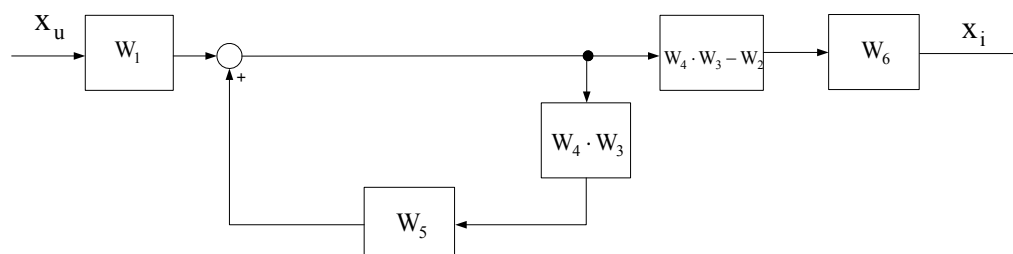
Слика 5.57.

На обележени део, слика 5.58., се даље примењује правило 3., из табеле 3.



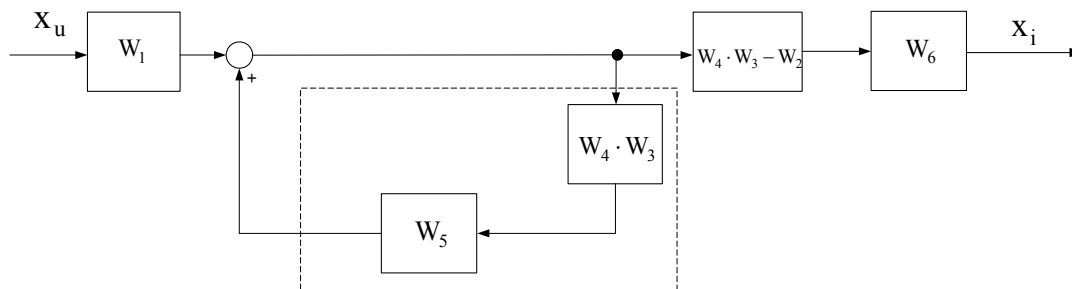
Слика 5.58.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.59:



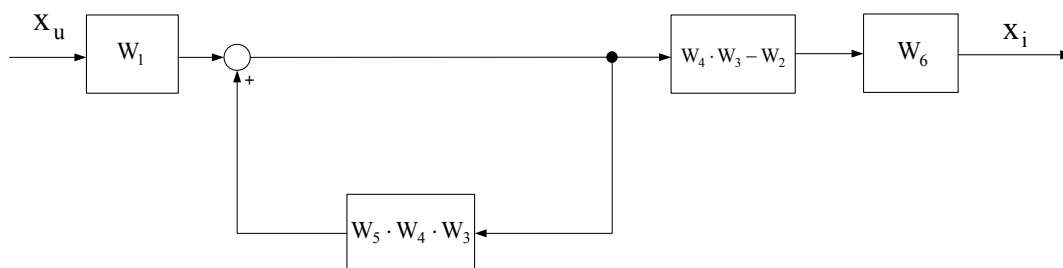
Слика 5.59.

На обележени део, слика 5.60., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



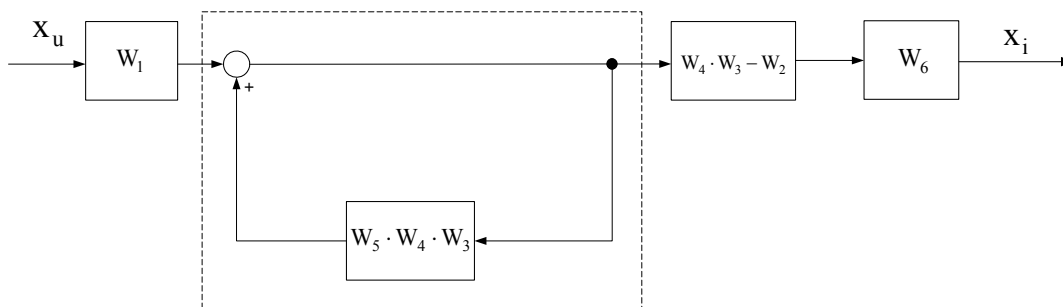
Слика 5.60.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.61:



Слика 5.61.

На обележени део, слика 5.62., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



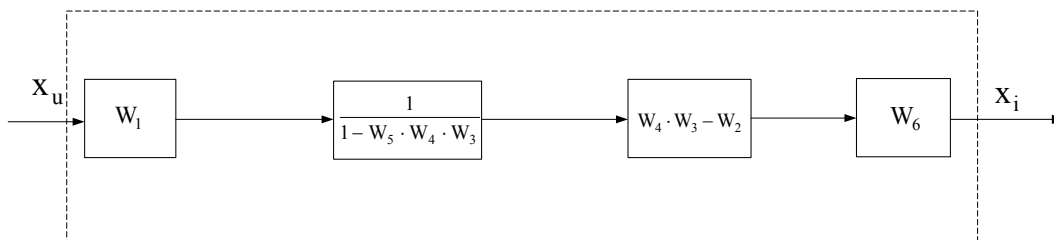
Слика 5.62.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.63:



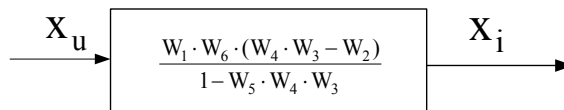
Слика 5.63.

На обележени део, слика 5.64., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



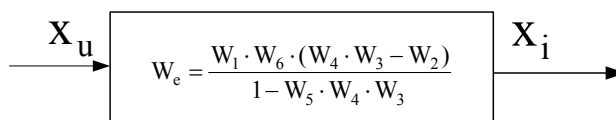
Слика 5.64.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.65:



Слика 5.65.

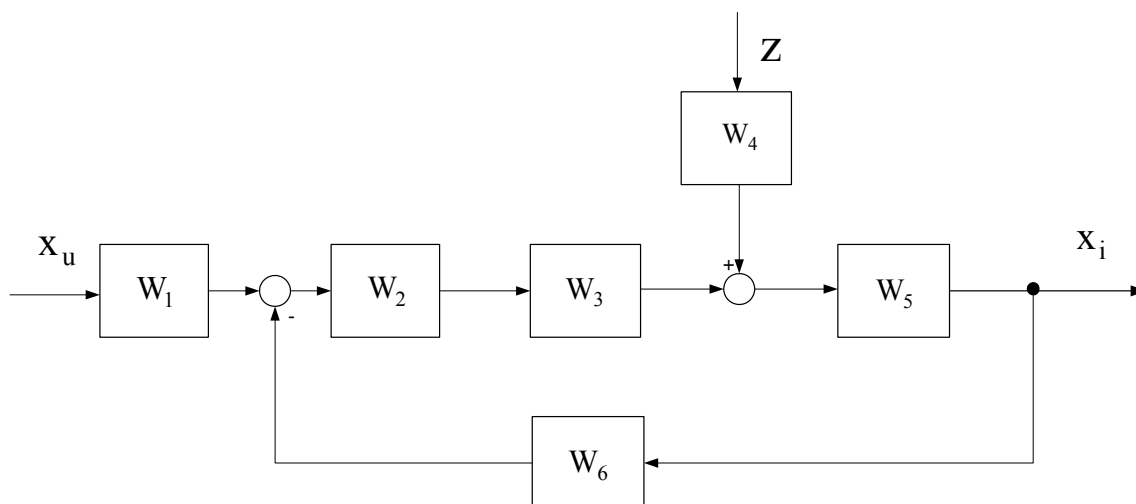
Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.66., за дати почетни блок дијаграм са одговарајућом функцијом спрегнутог преноса $W_e(s)$:



Слика 5.66.

Задатак 6.

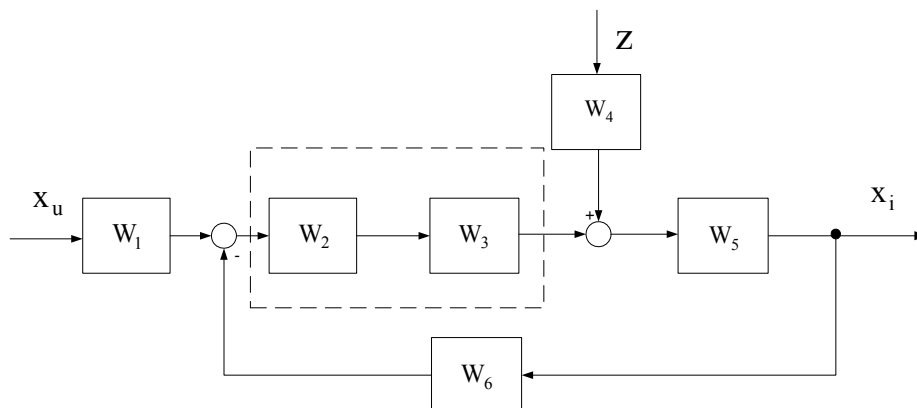
Алгебром функције преноса одредити спрегнути пренос система са слике 5.67:



Слика 5.67. Блок дијаграм

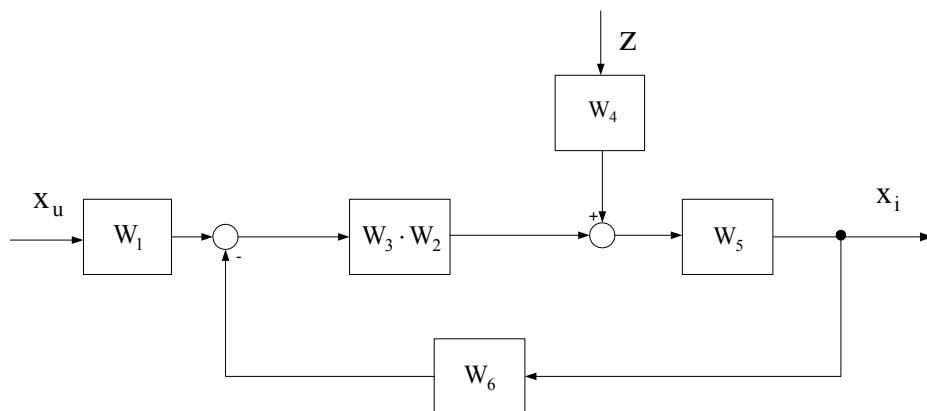
Решење:

Да би се одредила функција спрегнутог преноса за дати задатак на обележени део, слика 5.68., примењује се правило 1. из табеле 3.



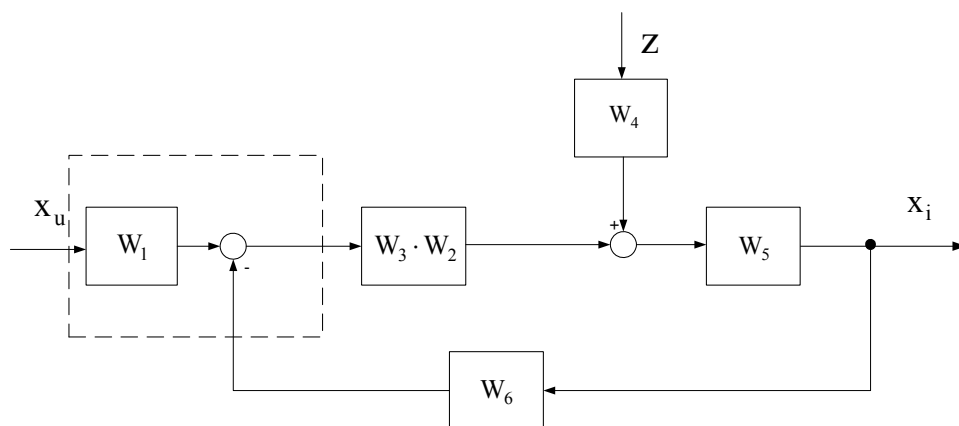
Слика 5.68.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.69:



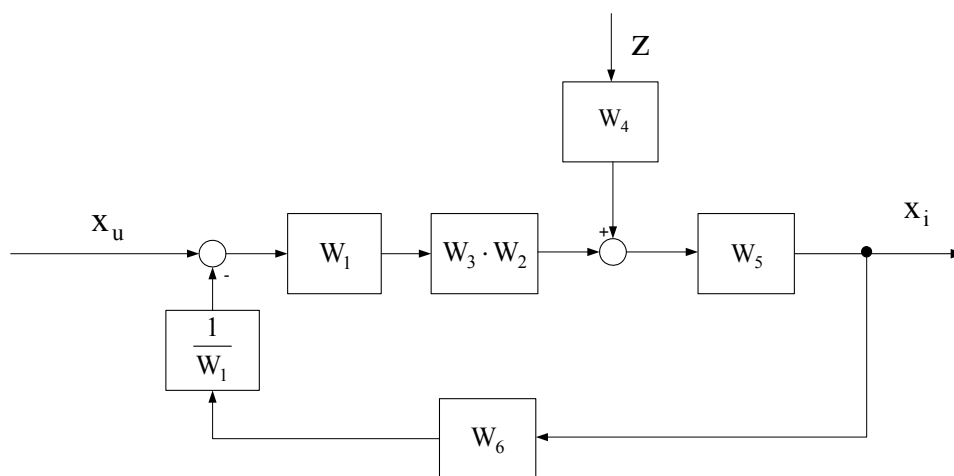
Слика 5.69.

На обележени део, слика 5.70., се даље примењује правило 11., из табеле 3.



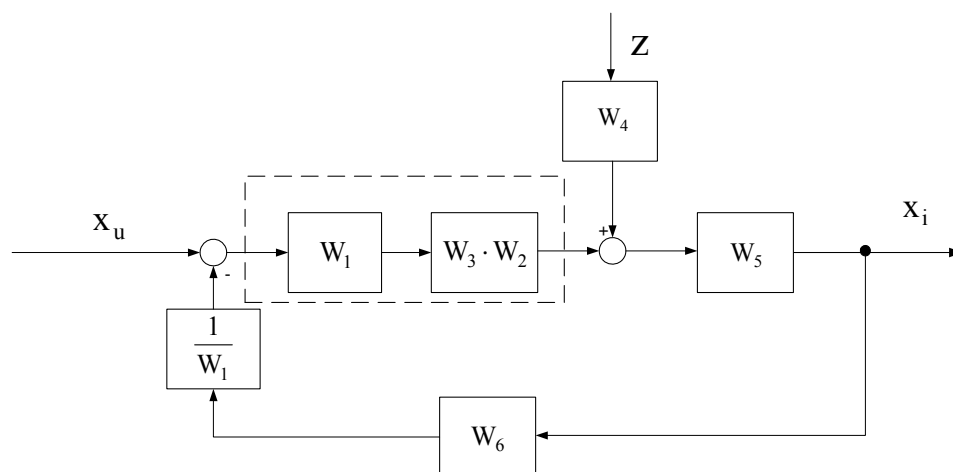
Слика 5.70.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.71:



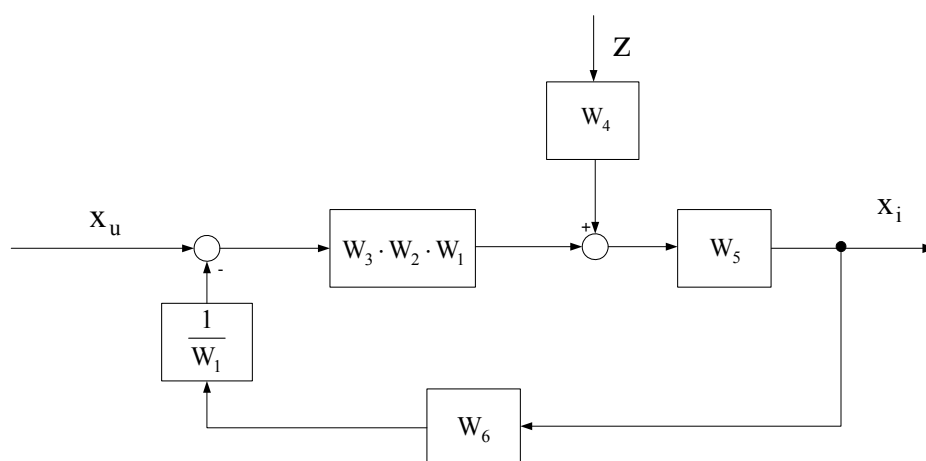
Слика 5.71.

На обележени део, слика 5.72., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



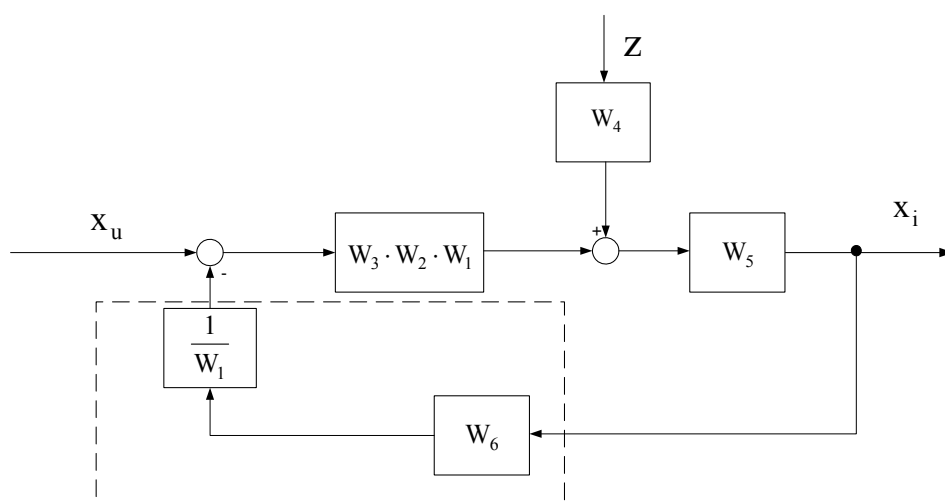
Слика 5.72.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.73:



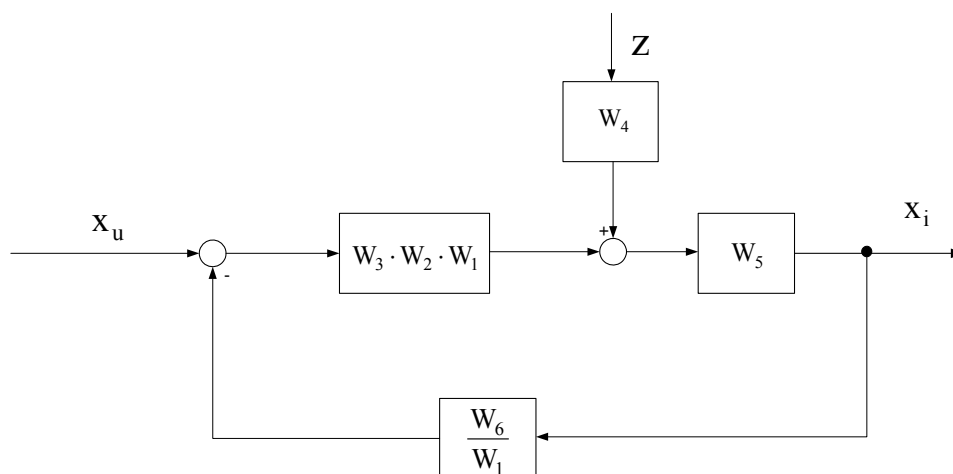
Слика 5.73.

На обележени део, слика 5.74., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



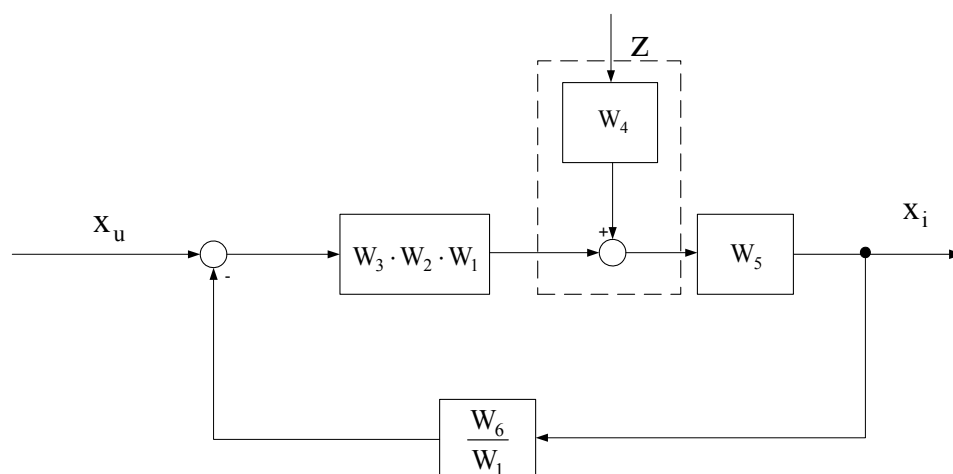
Слика 5.74.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.75:



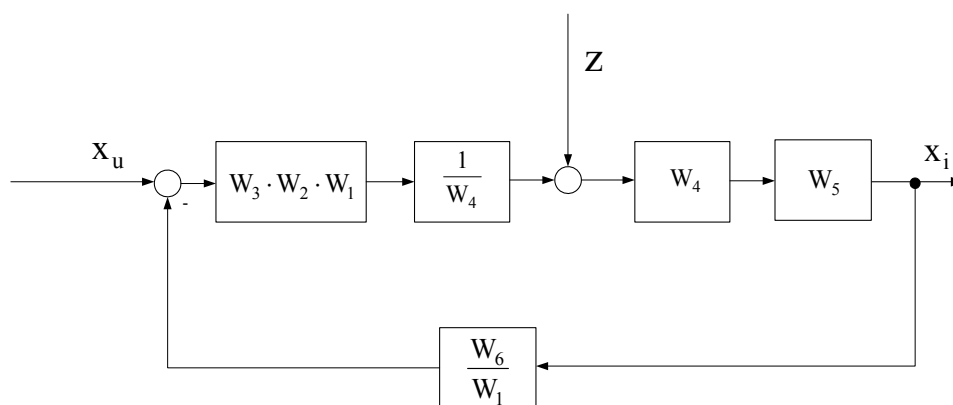
Слика 5.75.

На обележени део, слика 5.76., се даље примењује правило 11., из табеле 3.



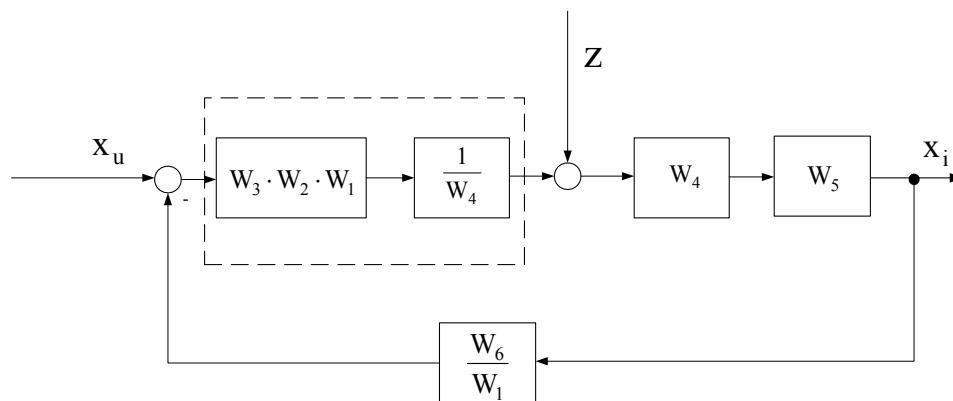
Слика 5.76.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.77:



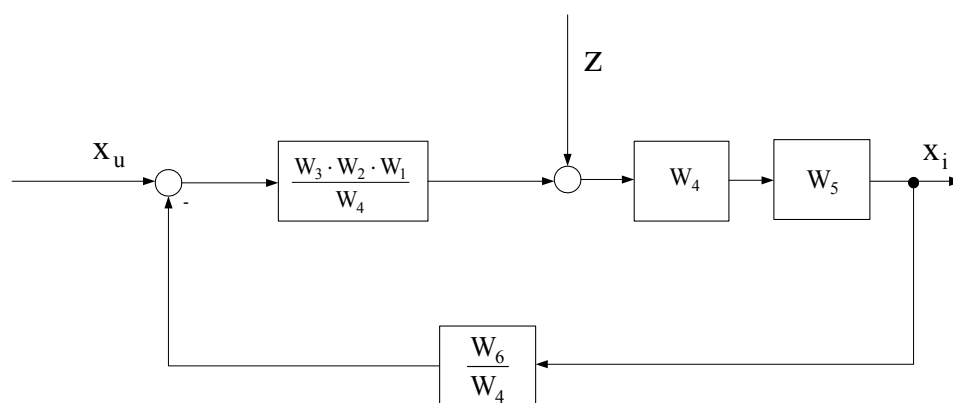
Слика 5.77.

На обележени део, слика 5.78., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



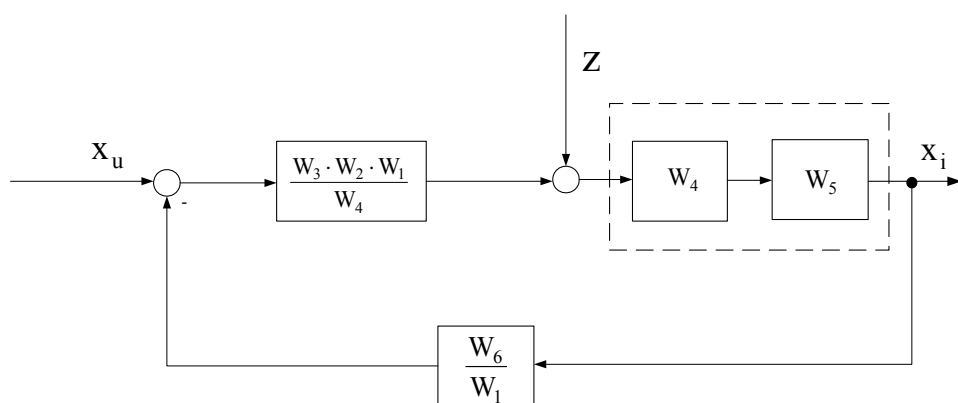
Слика 5.78.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.79:



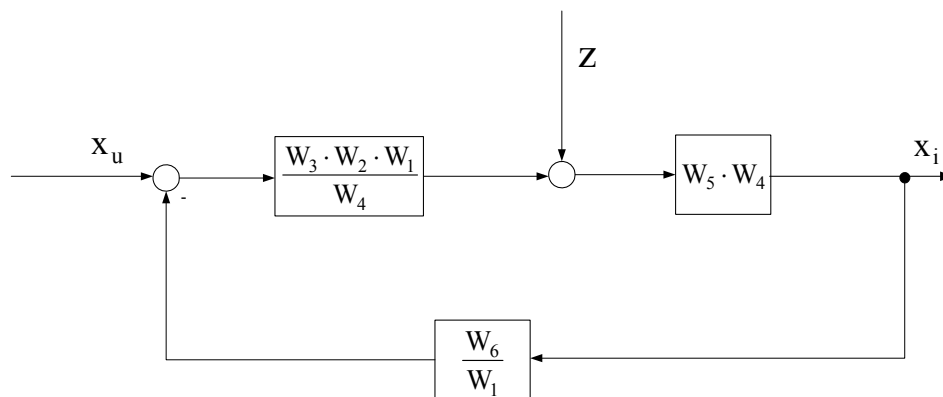
Слика 5.79.

На обележени део, слика 5.80., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



Слика 5.80.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.81:

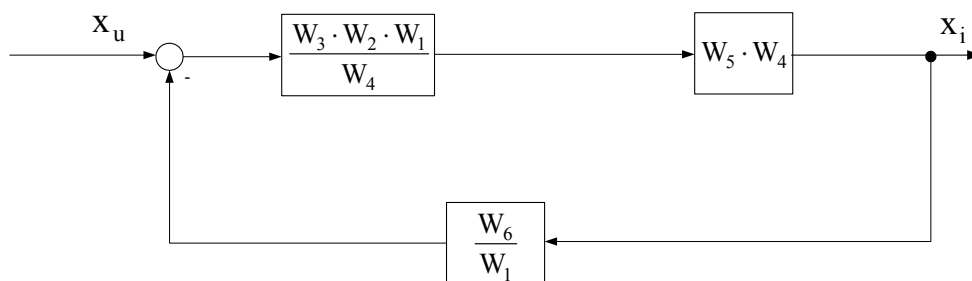


Слика 5.81.

Пошто се ради о систему са два улаза и једним излазом, на последњи блок дијаграм, слика 5.81., примењује се правило суперпозиције. Посматрају се два стања оваквог система:

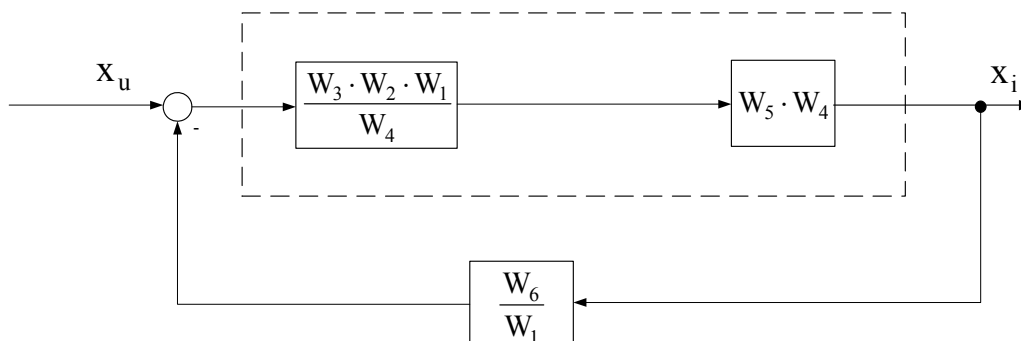
- 1) први случај је када се функција спрегнутог преноса посматра у односу на улаз $X_u(s)$ и добија се $W_u(s)$ -преносна функција у односу на улаз $X_u(s)$, тј. претпоставља се да систем има само један улаз $X_u(s)$ и један излаз $X_i(s)$, док је поремећај система $Z(s)$ једнак нули;
- 2) други случај је када се функција спрегнутог преноса посматра у односу на улаз поремећаја $Z(s)$ и добија се $W_z(s)$ -преносна функција у односу на улаз поремећаја $Z(s)$, тј. претпоставља се да на систем делује само поремећај $Z(s)$, док је улаз $X_u(s)$ једнак нули.

За први случај блок дијаграм је приказан на слици 5.82.



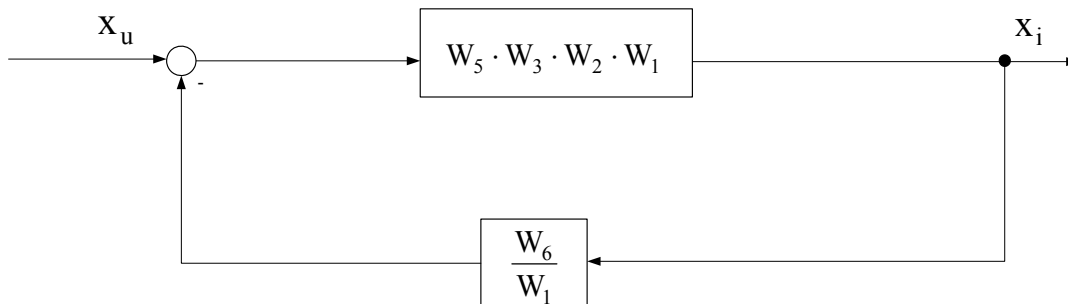
Слика 5.82.

На обележени део, слика 5.83., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



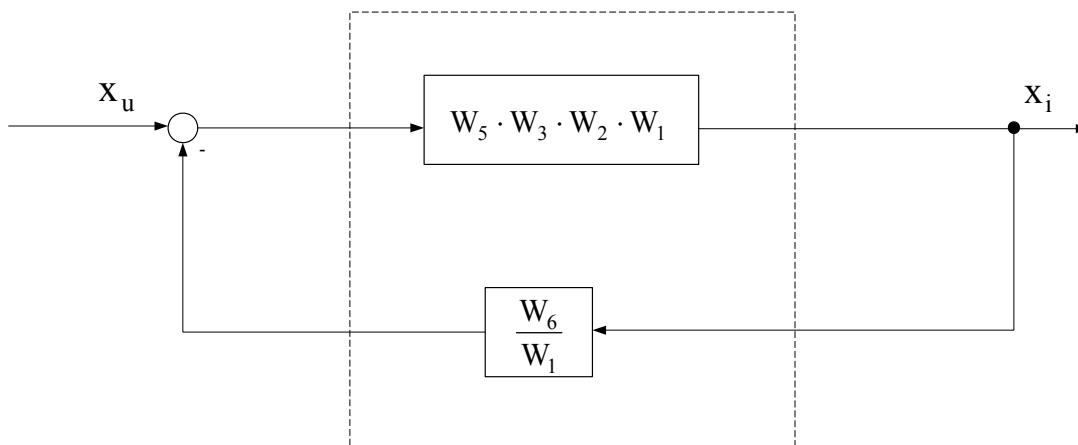
Слика 5.83.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.84:



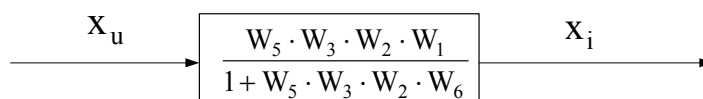
Слика 5.84.

На обележени део, слика 5.85., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



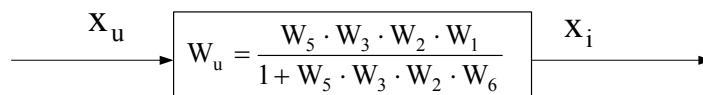
Слика 5.85.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.86:



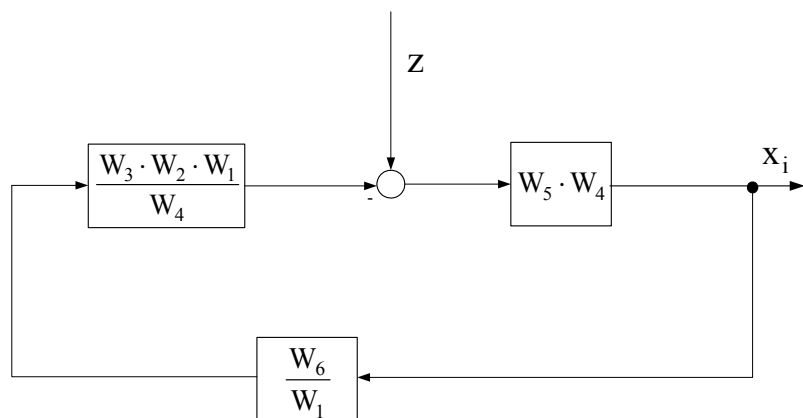
Слика 5.86.

Еквивалентни блок дијаграм у односу на улаз $X_u(s)$, са одговарајућом функцијом преноса $W_u(s)$, слика 5.87:



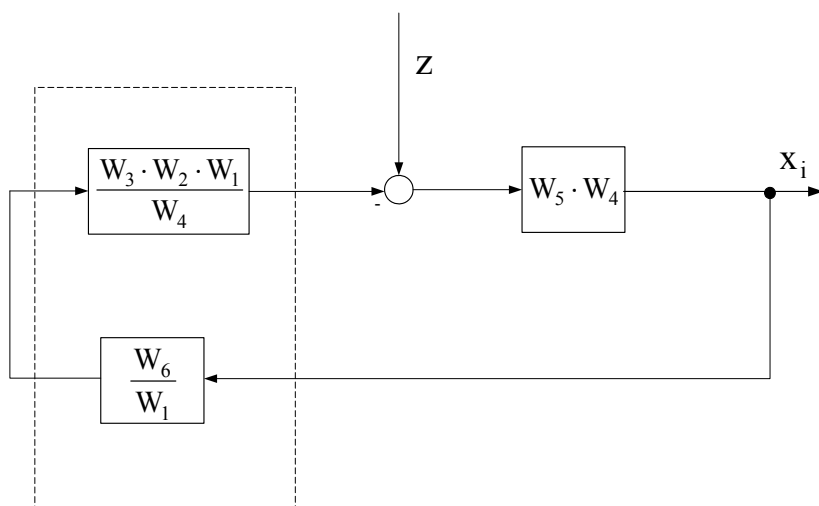
Слика 5.87.

За други случај блок дијаграм је приказан на слици 5.88.



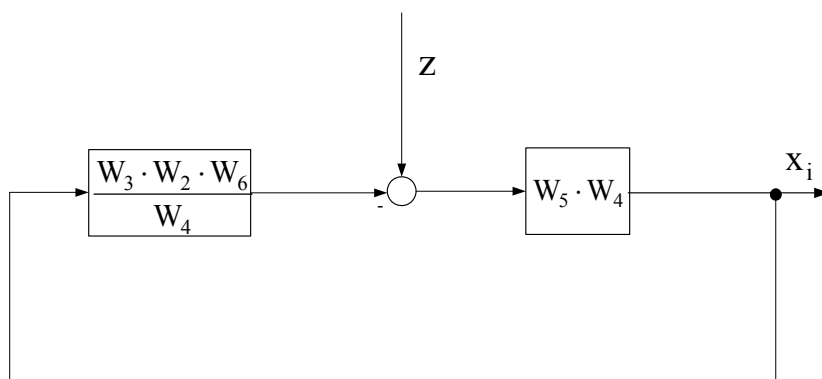
Слика 5.88.

На обележени део, слика 5.89., се даље примењује правило 1., из табеле 3.



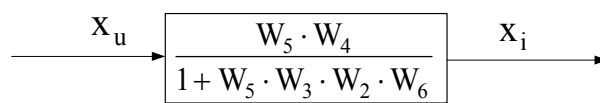
Слика 5.89.

Након примене овог правила добија се следећи блок дијаграм, слика 5.90:



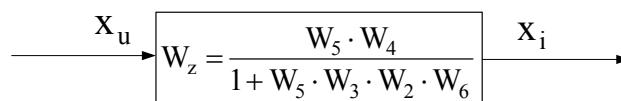
Слика 5.90.

На обележени део, слика 5.91., се даље примењује правило 2., из табеле 3.



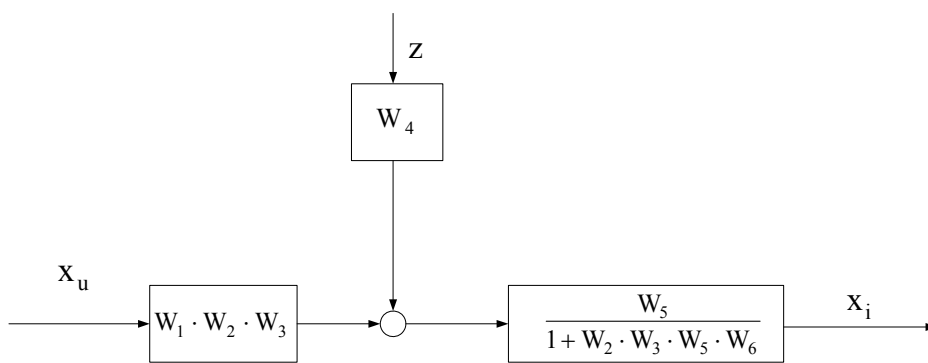
Слика 5.91.

Еквивалентни блок дијаграм у односу на улаз поремећаја $Z(s)$, са одговарајућом функцијом преноса $W_z(s)$, слика 5.92:



Слика 5.92.

Коначно добија се еквивалентни блок дијаграм, слика 5.93., за дати почетни блок дијаграм са два улаза и једним излазом:



Слика 5.93.

• посебан случај

Посебан случај се односи на системе чија је диференцијална једначина понашања не садржи ни један извод или интерграл његове улазне величине:

$$x_i^{(n)} + a_{n-1}x_i^{(n-1)} + \dots + a_0x_i = b_0x_u,$$

где важи да је :

$$b_0 \neq 0 \text{ и}$$

$$a_n = 1.$$

За приказивање система величина стања усвајају се фазне величине, и то:

$$x_1 = x_i;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}_i;$$

.

.

.

$$x_{n-1} = \dot{x}_{n-2} = \dot{x}_1^{(n-2)} = x_i^{(n-2)};$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} = \dot{x}_1^{(n-1)} = x_i^{(n-1)};$$

$$x_{n+1} = \dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + b_0x_u.$$

Ове фазне величине формирају вектор стања система:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Од овако изабраних величина стања формира се систем скаларних диференцијалних једначина стања, као:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

.

.

.

.

$$\dot{x}_{n-1} = x_n;$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-2}x_{n-1} - a_{n-1}x_n + b_0x_u.$$

За проучавање динамичких особина система погодније је ипак користити векторску једначину стања :

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

И векторску једначину излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

За посебан случај система у простору стања, матрица система A , вектор улаза $\underline{b}$, вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Матрица систем A у оваквом облику се још назива и **матрица пратиља** (матрица пратилица) или Фробениусова матрица и означава се са P . Векторска једначина система у којој матрица система има облик матрица пратиље ($A=P$) је у **нормалном облику са матрицом пратиљом** тј. она је у **фазном нормалном облику**.

• општи случај

Општи случај се односи на системе чија диференцијална једначина понашања садржи и изводе његове улазне величине:

$$x_i^{(n)} + a_{n-1}x_i^{(n-1)} + \dots + a_0x_i = b_0x_u + b_1x_u^{(1)} + \dots + b_mx_u^{(m)}$$

где важе услови да су:

$$a_n = 1;$$

$$m \leq n;$$

$$b_n = \begin{cases} 0; & m < n \\ \neq 0; & m = n. \end{cases}$$

Ако су прва два услова задовољена могуће је применити Први општи Кошијев алгоритам (избор тзв. Кошијевих величина стања), који гласи:

$$x_1 = x_i - b_n x_u \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 0 \Rightarrow x_i = x_1$$

$$x_2 = \dot{x}_1 + a_{n-1}x_i - b_{n-1}x_u;$$

$$x_3 = \dot{x}_2 + a_{n-2}x_i - b_{n-2}x_u;$$

.

.

.

$$x_{n-1} = \dot{x}_{n-2} + a_2x_i - b_2x_u;$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} + a_1x_i - b_1x_u;$$

$$x_n = -a_0x_i + b_0x_u.$$

После замене $x_i (x_i = x_1 + b_n x_u)$ у свим једначинама, осим прве, добијају се скаларне диференцијалне једначине стања у следећем облику:

$$\dot{x}_1 = -a_{n-1}x_1 + x_2 + (b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -a_{n-2}x_1 + x_3 + (b_{n-2} - a_{n-2}b_n)x_u;$$

$$\dot{x}_3 = -a_{n-3}x_1 + x_4 + (b_{n-3} - a_{n-3}b_n)x_u;$$

·

·

·

$$\dot{x}_{n-1} = -a_1x_1 + x_n + (b_1 - a_1b_n)x_u;$$

$$\dot{x}_n = -a_0x_1 + (b_0 - a_0b_n)x_u.$$

На основу скаларних диференцијалних једначина стања добија се векторска диференцијална једначина стања система у нормалном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

Сада је јасно да величине стања представљају Кошијеве величине стања.

На основу једначине излазне величине добија се једначина излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

За општи случај система у простору стања, матрица система $\underline{A}$, вектор улаза $\underline{b}$, вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1}b_n \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ \cdot \\ b_1 - a_1b_n \\ b_0 - a_0b_n \end{bmatrix}; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n.$$

Други општи алгоритам за избор величина стања омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Овде се матрица пратиља $\underline{P}$, вектори $\underline{b}$ и $\underline{c}$, и константа директног преноса d , рачунају као:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} b_0 - a_0b_n \\ b_1 - a_1b_n \\ \cdot \\ b_{n-2} - a_{n-2}b_n \\ b_{n-1} - a_{n-1}b_n \end{bmatrix}; \quad d = b_n.$$

У овом случају величине стања су одређене помоћном величином $k(t)$ (помоћни сигнал) која представља решење помоћне диференцијалне једначине:

$$k^{(n)} + a_{n-1}k^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{k} + a_0 k = x_u.$$

тако да је x_i одређено са :

$$x_i = b_0 k + b_1 \dot{k} + \dots + b_n k^{(n)}.$$

Величине стања се сада бирају у фазном облику $x_1 = k$:

$$x_1 = c;$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{c};$$

.

.

.

$$x_{n-1} = \dot{x}_{n-2} = \dot{x}_1^{(n-2)} = c^{(n-2)};$$

$$x_n = \dot{x}_{n-1} = \dot{x}_1^{(n-1)} = c^{(n-1)}.$$

6.2. Одређивање векторске једначине стања и векторске једначине излаза за модел система у простору стања (примери решених задатака)

Задатак 1.

За динамички систем описан диференцијалном једначином:

$$x_i^{(IV)}(t) + 6\ddot{\ddot{x}}_i(t) + 2\ddot{\ddot{x}}_i(t) + \dot{x}_i(t) + 3x_i(t) = 8x_u(t),$$

дефинисати модел у простору стања преко:

а) векторске једначине стања и

б) векторске једначине излаза.

Решење:

На основу диференцијалне једначине понашања може се утврдити да се ради о посебном случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m = 0; b_0 \neq 0; a_n = 1$.

За дати израз:

$$x_i^{(IV)}(t) + 6\ddot{\ddot{x}}_i(t) + 2\ddot{\ddot{x}}_i(t) + \dot{x}_i(t) + 3x_i(t) = 8x_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 4$ за $n = 4$:

$$\dot{x}_1 = x_1;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1;$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_1;$$

$$\dot{x}_4 = \dot{x}_3 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_1;$$

$$\dot{x}_5 = \dot{x}_4 = -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 8x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = x_4;$$

$$\dot{x}_4 = -3x_1 - x_2 - 2x_3 - 6x_4 + 8x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Коначно задатком дата диференцијална једначина понашања система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$\underline{x}_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
>> A=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;-3 -1 -2 -6];
>> b=[0;0;0;1];
>> c=[1 0 0 0];
>> d=[0]
sys=ss(A,b,c,d)
returns
```

Задатак 2.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 10},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

а) векторске једначине стања и

б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{3}{s^2 + 2s + 10},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 2s + 10)X_i(s) = 3X_u(s),$$

или

$$s^2 X_i(s) + 2s X_i(s) + 10 X_i(s) = 3 X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s) + 2s X_i(s) + 10 X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3 X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[2s X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[10 X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3 X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\dot{x}_i(t) + 10x_i(t) = 3x_u(t).$$

На основу диференцијалне једначине понашања може се утврдити да се ради о посебном случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m = 0$; $b_0 \neq 0$; $a_n = 1$.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\dot{x}_i(t) + 10x_i(t) = 3x_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 2$ за $n = 2$:

$$x_1 = x_i;$$

$$x_2 = \dot{x}_1;$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 = -10x_1 - 2x_2 + 3x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -10x_1 - 2x_2 + 3x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(>> A=[0 1;-10 -2];
>> b=[0;3];
>> c=[1 0];
>> d=[0]
sys=ss(A,b,c,d)
returns)
```

Задатак 3.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Имениоц почетне функције може се написати и као:

$$s(s+1)(s+2) = s(s^2 + 2s + s + 2) = s^3 + 3s^2 + 2s.$$

Преносна се функција сада може написати као:

$$W(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s}.$$

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s},$$

одакле се добија:

$$(s^3 + 3s^2 + 2s)X_i(s) = 2X_u(s),$$

или

$$s^3X_i(s) + 3s^2X_i(s) + 2sX_i(s) = 2X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3X_i(s) + 3s^2X_i(s) + 2sX_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[2X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[3s^2X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[2sX_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[2X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{\bar{x}}_i(t) + 3\ddot{\bar{x}}_i(t) + 2\dot{\bar{x}}_i(t) = 2x_u(t).$$

На основу диференцијалне једначине понашања може се утврдити да се ради о посебном случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m = 0; b_0 \neq 0; a_n = 1$.

За дати израз:

$$\ddot{\bar{x}}_i(t) + 3\ddot{\bar{x}}_i(t) + 2\dot{\bar{x}}_i(t) = 2x_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 3$ за $n = 3$:

$$x_1 = x_i;$$

$$x_2 = \dot{x}_1;$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_i;$$

$$x_4 = \dot{x}_3 = -0 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -2x_2 - 3x_3 + 2x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$\mathbf{x}_i = \underline{\mathbf{c}}^T \cdot \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{d} \cdot x_u \Rightarrow \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(
>> A = [0 1 0; 0 0 1; 0 -2 -3];
>> b = [0; 0; 2];
>> c = [1 0 0];
>> d = [0]
sys = ss(A, b, c, d)
returns
)
```

Задатак 4.

Функцију:

$$f(t) = \sin 3t,$$

превести у комплексни домен, а затим за тако дефинисану преносну функцију дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

На основу табеле 1., под редним бројем 11., дата функција се на основу Лапласових трансформација преводи из временског у комплексни домен.

$$F(s) = W(s) = \mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Преносна се функција сада може написати као:

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{3}{s^2 + 9},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 9)X_i(s) = 3X_u(s),$$

или

$$s^2 X_i(s) + 9X_i(s) = 3X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s) + 9X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[9X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + 9x_i(t) = 3x_u(t).$$

На основу диференцијалне једначине понашања може се утврдити да се ради о посебном случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m = 0$; $b_0 \neq 0$; $a_n = 1$.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 9x_i(t) = 3x_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 2$ за $n = 2$:

$$x_1 = x_i;$$

$$x_2 = \dot{x}_1;$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = -9x_1 - 0 + 3x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -9x_1 + 3x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(
>> A=[0 1;-9 0];
>> b=[0;3];
>> c=[1 0];
>> d=[0]
sys=ss(A,b,c,d)
returns
)
```

Задатак 5.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{3}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{3}{s^3 + 2s^2 + 4s + 4},$$

одакле се добија:

$$(s^3 + 2s^2 + 4s + 4)X_i(s) = 3X_u(s),$$

или

$$s^3X_i(s) + 2s^2X_i(s) + 4sX_i(s) + 4X_i(s) = 3X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3X_i(s) + 2s^2X_i(s) + 4sX_i(s) + 4X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[2s^2X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[4sX_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[4X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[3X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{\ddot{x}}_i(t) + 2\ddot{\ddot{x}}_i(t) + 4\dot{x}_i(t) + 4x_i(t) = 3x_u(t).$$

На основу диференцијалне једначине понашања може се утврдити да се ради о посебном случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m=0$; $b_0 \neq 0$; $a_n=1$.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 2\dot{x}_i(t) + 4x_i(t) = 3x_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r=3$ за $n=3$:

$$x_1 = x_i;$$

$$x_2 = \dot{x}_1;$$

$$x_3 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}_i;$$

$$x_4 = \dot{x}_3 = -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 3x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
( >> A = [0 1 0; 0 0 1; -4 -4 -2];
>> b = [0; 0; 3];
>> c = [1 0 0];
>> d = [0]
sys = ss(A, b, c, d)
returns )
```

Задатак 6.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + s + 1)X_i(s) = sX_u(s),$$

или

$$s^2X_i(s) + sX_i(s) + X_i(s) = sX_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2X_i(s) + sX_i(s) + X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[sX_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[sX_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[sX_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + \dot{x}_i(t) + x_i(t) = \dot{x}_u(t).$$

Пошто у диференцијалној једначини понашања система постоји извод улазне величине може се утврдити да се ради општем случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m \leq n$; $a_n = 1$.

Начин 1:

Сада је могуће применити Први општи Кошијев алгоритам за одређивање једначине стања и једначине излаза система у простору стања.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + \dot{x}_i(t) + x_i(t) = \dot{x}_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 2$ за $n = 2$:

$$x_1 = x_i - b_n x_u; \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 0 \Rightarrow x_i = x_1;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_1 - \dot{x}_u;$$

$$\dot{x}_2 = -\dot{x}_1.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(
>> A = [-1 1; -1 0];
>> b = [1; 0];
>> c = [1 0];
>> d = [0]
sys = ss(A, b, c, d)
returns
)
```

Начин 2:

Други начин омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Да би се применио Други општи алгоритам за избор величина стања, почетна преносна функција множи се са количником комплексног лика помоћне променљиве $k(t)$, $\frac{K(s)}{K(s)}$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{K(s)}{K(s)}.$$

Из последње једначине добијају се изрази за комплексне ликове улаза $X_u(s)$ и излаза $X_i(s)$ система:

$$X_u(s) = (s^2 + s + 1) \cdot K(s) = s^2 K(s) + sK(s) + K(s) \Rightarrow s^2 K(s) = -K(s) - sK(s) + X_u(s);$$

$$X_i(s) = sK(s).$$

Пошто је систем реда $r = 2$ за $n = 2$, модел у простору стања чине две променљиве стања, које се изражавају на следећи начин:

$$x_1 = K(s);$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = s \cdot K(s);$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = s^2 \cdot K(s).$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + X_u(s).$$

Одавде су матрица пратиља $\underline{P}$ и вектор $\underline{b}$ једнаки:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из израза за излаз:

$$X_i(s) = sK(s) \Rightarrow c_1 = 1,$$

добила се вектор $\underline{c}$ излаза у облику:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Константа директног преноса d је једнака:

$$d = b_n = 0.$$

Matlab code :

```
( >> P = [0 1; -1 -1];
  >> b = [0;1];
  >> c = [0 1];
  >> d = [0]
  sys = ss(P,b,c,d)
  returns )
```

Задатак 7.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+50},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+50},$$

одакле се добија:

$$(s^2+5s+50)X_i(s) = (s+2)X_u(s),$$

или

$$s^2X_i(s) + 5sX_i(s) + 50X_i(s) = sX_u(s) + 2X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2X_i(s) + 5sX_i(s) + 50X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[sX_u(s) + 2X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[5sX_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[50X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[sX_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[2X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + 5\dot{x}_i(t) + 50x_i(t) = 2x_u(t) + \dot{x}_u(t).$$

Пошто у диференцијалној једначини понашања система постоји извод улазне величине може се утврдити да се ради општем случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m \leq n$; $a_n = 1$.

Начин 1:

Сада је могуће применити Први општи Кошијев алгоритам за одређивање једначине стања и једначине излаза система у простору стања.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 5\dot{x}_i(t) + 50x_i(t) = 2x_u(t) + \dot{x}_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 2$ за $n = 2$:

$$x_1 = x_i - b_n x_u; \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 0 \Rightarrow x_i = x_1;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 5x_1 - x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -50x_1 + 2x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = -5x_1 + x_2 + x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -50x_1 + 2x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -50 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -50 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(>> A = [-5 1; -50 0];
>> b = [1; 2];
>> c = [1 0];
>> d = [0]
sys = ss(A, b, c, d)
returns)
```

Начин 2:

Други начин омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Да би се применио Други општи алгоритам за избор величина стања, почетна преносна функција множи се са количником комплексног лика помоћне променљиве $k(t)$, $\frac{K(s)}{K(s)}$:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s+2}{s^2+5s+50} \cdot \frac{K(s)}{K(s)}.$$

Из последње једначине добијају се изрази за комплексне ликове улаза $X_u(s)$ и излаза $X_i(s)$ система:

$$X_u(s) = (s^2 + 5s + 50) \cdot K(s) = s^2 K(s) + 5sK(s) + 50K(s) \Rightarrow s^2 K(s) = -50K(s) - 5sK(s) + X_u(s);$$

$$X_i(s) = sK(s) + 2K(s).$$

Пошто је систем реда $r = 2$ за $n = 2$, модел у простору стања чине две променљиве стања, које се изражавају на следећи начин:

$$x_1 = K(s);$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = s \cdot K(s);$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = s^2 \cdot K(s).$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -50x_1 - 5x_2 + X_u(s).$$

Одавде су матрица пратиља $\underline{P}$ и вектор $\underline{b}$ једнаки:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -5 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из израза за излаз:

$$X_i(s) = 2K(s) + sK(s) \Rightarrow c_0 = 2; c_1 = 1,$$

добила се вектор $\underline{c}$ излаза у облику:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Константа директног преноса d је једнака:

$$d = b_n = 0.$$

Matlab code :

```
( >> P = [0 1; -50 -5];
  >> b = [0;1];
  >> c = [2 1];
  >> d = [0]
  sys = ss(P,b,c,d)
  returns )
```

Задатак 8.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2 + 4s + 8}$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2 + 4s + 8},$$

одакле се добија:

$$(s^2 + 4s + 8)X_i(s) = (s^2 + 2s + 4)X_u(s),$$

или

$$s^2 X_i(s) + 4s X_i(s) + 8X_i(s) = s^2 X_u(s) + 2s X_u(s) + 4X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s) + 4s X_i(s) + 8X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^2 X_u(s) + 2s X_u(s) + 4X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^2 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[4s X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[8X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^2 X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[2s X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[4X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + 4\dot{x}_i(t) + 8x_i(t) = 4x_u(t) + 2\dot{x}_u(t) + \ddot{x}_u(t).$$

Пошто у диференцијалној једначини понашања система постоји извод улазне величине може се утврдити да се ради општем случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m \leq n$; $a_n = 1$.

Начин 1:

Сада је могуће применити Први општи Кошијев алгоритам за одређивање једначине стања и једначине излаза система у простору стања.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 4\dot{x}_i(t) + 8x_i(t) = 4x_u(t) + 2\dot{x}_u(t) + \ddot{x}_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 2$ за $n = 2$:

$$x_1 = x_i - b_n x_u; \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 1 \Rightarrow x_i = x_1 + x_u;$$

$$x_2 = \dot{x}_1 + 4x_1 + 4x_u - 2x_u = \dot{x}_1 + 4x_1 + 2x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -8x_1 - 8x_u + 4x_u = -8x_1 - 4x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 - 2x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -8x_1 - 4x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n = 1.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + x_u.$$

Matlab code :

```
(
>> A = [-4 1; -8 0];
>> b = [-1; -4];
>> c = [1 0];
>> d = [1]
sys = ss(A, b, c, d)
returns
)
```

Начин 2:

Други начин омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Приметимо да су полиноми у бројиоцу и имеониоцу истог степена. Треба извршити дељење ових полинома тако да се добије константа и количник у коме је степен полинома у бројиоцу мањи од степена полинома у имениоцу:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^2 + 2s + 4}{s^2 + 4s + 8} \Rightarrow \\ (s^2 + 2s + 4) \div (s^2 + 4s + 8) &= 1 + \frac{-2s - 4}{s^2 + 4s + 8} \\ \frac{-(s^2 + 4s + 8)}{s^2 + 4s + 8} &= -1 \\ // -2s - 4 \end{aligned}$$

Сада је поступак идентичан као у претходним задацима.

Да би се применио Други општи алгоритам за избор величина стања, добијена преносна функција множи се са количником комплексног lika помоћне променљиве $k(t)$, $\frac{K(s)}{K(s)}$:

$$\frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{-2s - 4}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{K(s)}{K(s)}.$$

Из последње једначине добијају се изрази за комплексне ликове улаза $X_u(s)$ и излаза $X_i(s)$ система:

$$\begin{aligned} X_u(s) &= (s^2 + 4s + 8) \cdot K(s) = s^2 K(s) + 4s K(s) + 8K(s) \Rightarrow s^2 K(s) = -8K(s) - 4s K(s) + X_u(s); \\ X_i(s) &= -2s K(s) - 4K(s). \end{aligned}$$

Пошто је систем реда $r = 2$ за $n = 2$, модел у простору стања чине две променљиве стања, које се изражавају на следећи начин:

$$x_1 = K(s);$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = s \cdot K(s);$$

$$x_3 = \dot{x}_2 = s^2 \cdot K(s).$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -8x_1 - 4x_2 + X_u(s).$$

Одавде су матрица пратиља P и вектор $\underline{b}$ једнаки:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из израза за излаз:

$$X_1(s) = -2K(s) - 4sK(s) \Rightarrow c_0 = -2; c_1 = -4,$$

добива се вектор $\underline{c}$ излаза у облику:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Константа директног преноса d је једнака:

$$d = 1.$$

Matlab code :

```
( >> P = [0 1; -8 -4];
  >> b = [0;1];
  >> c = [-2 -4];
  >> d = [1]
  sys = ss(P, b, c, d)
  returns )
```

Задатак 9.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^3 + 10s^2 + 15s + 5},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

а) векторске једначине стања и

б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^3 + 10s^2 + 15s + 5},$$

одакле се добија:

$$(s^3 + 10s^2 + 15s + 5)X_i(s) = (s^2 + 5s + 10)X_u(s),$$

или

$$s^3 X_i(s) + 10s^2 X_i(s) + 15s X_i(s) + 5X_i(s) = s^2 X_u(s) + 5s X_u(s) + 10X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3 X_i(s) + 10s^2 X_i(s) + 15s X_i(s) + 5X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^2 X_u(s) + 5s X_u(s) + 10X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[10s^2 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[15s X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[5X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^2 X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[5s X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[10X_u(s)]$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

$$\ddot{x}_i(t) + 10\ddot{x}_i(t) + 15\dot{x}_i(t) + 5x_i(t) = 10x_u(t) + 5\dot{x}_u(t) + \ddot{x}_u(t).$$

Пошто у диференцијалној једначини понашања система постоји извод улазне величине може се утврдити да се ради општем случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m \leq n; a_n = 1$.

Начин 1:

Сада је могуће применити Први општи Кошијев алгоритам за одређивање једначине стања и једначине излаза система у простору стања.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 10\ddot{x}_i(t) + 15\dot{x}_i(t) + 5x_i(t) = 10x_u(t) + 5\dot{x}_u(t) + \ddot{x}_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r = 3$ за $n = 3$:

$$x_1 = x_i - b_n x_u; \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 0 \Rightarrow x_i = x_1;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + 10x_1 - x_u;$$

$$x_3 = \dot{x}_2 + 15x_1 - 5x_u;$$

$$\dot{x}_3 = -5x_1 + 10x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = -10x_1 + x_2 + x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -15x_1 + x_3 + 5x_u$$

$$\dot{x}_3 = -5x_1 + 10x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n = 0.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -15 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Matlab code :

```
(>> A=[-10 1 0;-15 0 1;-5 0 0];
>> b=[1;5;10];
>> c=[1 0 0];
>> d=[0]
sys=ss(A,b,c,d)
returns)
```

Начин 2:

Други начин омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = P \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Да би се применио Други општи алгоритам за избор величина стања, почетна преносна функција множи се са количником комплексног лика помоћне променљиве $k(t)$,

$$\frac{K(s)}{K(s)}:$$

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s^2 + 5s + 10}{s^3 + 10s^2 + 15s + 5} \cdot \frac{K(s)}{K(s)}.$$

Из последње једначине добијају се изрази за комплексне ликове улаза $X_u(s)$ и излаза $X_i(s)$ система:

$$\begin{aligned} X_u(s) &= (s^3 + 10s^2 + 15s + 5) \cdot K(s) = s^3 K(s) + 10s^2 K(s) + 15s K(s) + 5K(s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s^3 K(s) = -5K(s) - 15s K(s) - 10s^2 K(s) + X_u(s); \\ X_i(s) &= s^2 K(s) + 5s K(s) + 10K(s). \end{aligned}$$

Пошто је систем реда $r = 3$ за $n = 3$, модел у простору стања чине две променљиве стања, које се изражавају на следећи начин:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 = s \cdot K(s); \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_2 = s^2 \cdot K(s); \\ \dot{x}_4 &= \dot{x}_3 = s^3 \cdot K(s). \end{aligned}$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -5x_1 - 15x_2 - 10x_3 + X_u(s). \end{aligned}$$

Одавде су матрица пратиља P и вектор $\underline{b}$ једнаки:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -15 & -10 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из израза за излаз:

$$X_i(s) = 10K(s) + 5sK(s) + s^2K(s) \Rightarrow c_0 = 10; c_1 = 5; c_2 = 1,$$

добија се вектор $\underline{c}$ излаза у облику:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Константа директног преноса d је једнака:

$$d = b_n = 0.$$

Matlab code :

```
(
>> P=[0 1 0;0 0 1;-5 -15 -10];
>> b=[0;0;1];
>> c=[10 5 1];
>> d=[0]
sys=ss(P,b,c,d)
returns
)
```

Задатак 10.

За преносну функцију система:

$$W(s) = \frac{s^3 + 17s^2 + 7}{s^3 + 9s + 4},$$

дефинисати модел у простору стања преко:

- а) векторске једначине стања и
- б) векторске једначине излаза.

Решење:

Да би се дошло до диференцијалне једначине која описује понашање датог систем, почетну преносну функцију система треба трансформисати.

Почетни израз се може написати као:

$$W(s) = \frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{s^3 + 17s^2 + 7}{s^3 + 9s + 4},$$

одакле се добија:

$$(s^3 + 9s + 4)X_i(s) = (s^3 + 17s^2 + 7)X_u(s),$$

или

$$s^3 X_i(s) + 9s X_i(s) + 4X_i(s) = s^3 X_u(s) + 17s^2 X_u(s) + 7X_u(s).$$

Уз помоћ инверзних Лапласових трансформација, обе стране дате диференцијалне једначине преводе се из комплексног у временски домен:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3 X_i(s) + 9s X_i(s) + 4X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^3 X_u(s) + 17s^2 X_u(s) + 7X_u(s)].$$

На основу правила, табела 2. под редним бројем 1., следи:

$$\mathcal{L}^{-1}[s^3 X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[9s X_i(s)] + \mathcal{L}^{-1}[4X_i(s)] = \mathcal{L}^{-1}[s^3 X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[17s^2 X_u(s)] + \mathcal{L}^{-1}[7X_u(s)].$$

На основу табеле 2., редни број 5.и за све почетне услове једнаке нули, следи:

Пошто у диференцијалној једначини понашања система постоји извод улазне величине може се утврдити да се ради општем случају система у простору стања где су задовољени услови да су $m \leq n$; $a_n = 1$.

Начин 1:

Сада је могуће применити Први општи Кошијев алгоритам за одређивање једначине стања и једначине излаза система у простору стања.

За дати израз:

$$\ddot{x}_i(t) + 9\dot{x}_i(t) + 4x_i(t) = 7x_u(t) + 17\ddot{x}_u(t) + \ddot{x}_u(t),$$

усвајају се следеће фазне величине, за диференцијалну једначину реда $r=3$ за $n=3$:

$$x_1 = x_i - b_n x_u; \Rightarrow x_i = x_1 + b_n x_u \wedge b_n = 1 \Rightarrow x_i = x_1 + x_u;$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - 17\dot{x}_u;$$

$$\dot{x}_3 = \dot{x}_2 + 9\dot{x}_1 + 9\dot{x}_u;$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 - 4x_u + 7x_u = -4x_1 + 3x_u.$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 17x_u;$$

$$\dot{x}_2 = -9x_1 + x_3 - 9x_u;$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 + 3x_u.$$

На основу ових једначина формирају се матрица система A и вектор улаза $\underline{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 17 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Такође се може закључити и да вектор излаза $\underline{c}$ и константа директног преноса d имају следеће вредности:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad d = b_n = 1.$$

Коначно задатком дата преносна функција система се на основу познатих израза дефинише у простору стања:

а) векторском једначином стања:

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot x_u,$$

б) векторском једначином излаза:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u \Rightarrow x_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + x_u.$$

Matlab code :

```
( >> A=[0 1 0;-9 0 1;-4 0 0];
  >> b=[17;-9;3];
  >> c=[1 0 0];
  >> d=[1]
  sys=ss(A,b,c,d)
  returns )
```

Начин 2:

Други начин омогућава да се једначина стања добије у нормалном фазном облику:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{P} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_u,$$

а једначина излаза у облику:

$$x_i = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_u.$$

Приметимо да су полиноми у бројиоцу и имеониоцу истог степена. Треба извршити дељење ових полинома тако да се добије константа и количник у коме је степен полинома у бројиоцу мањи од степена полинома у имениоцу:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{s^3 + 17s^2 + 7}{s^3 + 9s + 4} \Rightarrow \\ (s^3 + 17s^2 + 7) \div (s^3 + 9s + 4) &= 1 + \frac{17s^2 - 9s + 3}{s^3 + 9s + 4} \\ &= \frac{-(s^3 + 9s + 4)}{s^3 + 9s + 4} + \frac{17s^2 - 9s + 3}{s^3 + 9s + 4} \\ &= \frac{17s^2 - 9s + 3}{s^3 + 9s + 4} \end{aligned}$$

Сада је поступак идентичан као у претходним задацима.

Да би се применио Други општи алгоритам за избор величина стања, добијена преносна функција множи се са количником комплексног лика помоћне променљиве $k(t)$, $\frac{K(s)}{K(s)}$.

$$\frac{X_i(s)}{X_u(s)} = \frac{17s^2 - 9s + 3}{s^3 + 9s + 4} \cdot \frac{K(s)}{K(s)}.$$

Из последње једначине добијају се изрази за комплексне ликове улаза $X_u(s)$ и излаза $X_i(s)$ система:

$$X_u(s) = (s^3 + 9s + 4) \cdot K(s) = s^3 K(s) + 9s K(s) + 4K(s) \Rightarrow s^3 K(s) = -4K(s) - 9s K(s) + X_u(s);$$

$$X_i(s) = 17s^2 K(s) - 9s K(s) + 3K(s).$$

Пошто је систем реда $r = 3$ за $n = 3$, модел у простору стања чине две променљиве стања, које се изражавају на следећи начин:

$$\dot{x}_1 = K(s);$$

$$\dot{x}_2 = x_1 = s \cdot K(s);$$

$$\dot{x}_3 = x_2 = s^2 \cdot K(s)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 = s^3 \cdot K(s).$$

За овако дефинисане величине стања формира се затим систем скаларних диференцијалних једначина стања:

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

$$\dot{x}_3 = -4x_1 - 9x_2 + X_u(s).$$

Одавде су матрица пратиља P и вектор $\underline{b}$ једнаки:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -9 & 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Из израза за излаз:

$$X_1(s) = 3K(s) - 9sK(s) + 17s^2K(s) \Rightarrow c_0 = 3; c_1 = -9; c_2 = 17,$$

добија се вектор $\underline{c}$ излаза у облику:

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Константа директног преноса d је једнака:

$$d = 1.$$

Matlab code :

```
(>> P=[0 1 0;0 0 1;-4 -9 0];
>> b=[0;0;1];
>> c=[3 -9 17];
>> d=[1]
sys=ss(P,b,c,d)
returns)
```

7. СТАБИЛНОСТ СИСТЕМА

За испитивање стабилности система користе се алгебарски и фреквентни критеријуми.

- **Алгебарски (аналитички) критеријуми:**
 1. Хурвицов (Hurwitz) критеријум;
 2. Роутов (Routh) критеријум.
- **Фреквентни (графо-аналитички) критеријуми:**
 1. Најквистов (Nyquist) критеријум;
 2. Бодев (Bode) критеријум.

Познато је да функција спрегнутог преноса повратне спреге има следећи облик:

$$W(s) = \frac{W_{\text{dir}}(s)}{1 \mp W_p(s)}.$$

Да би се испитала стабилност неког система потребно је одредити њену карактеристичну једначину. Карактеристична једначина се одређује изједначавањем имениоца функције спрегнутог преноса са нулом:

$$1 \mp W_p(s) = 0,$$

или ако овај последњи израз напишемо у полиномној форми, биће:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Да би се могао примењивати неки од критеријума потребно је испунити следеће услове:

- потребно је да $a_n = 1$, уколико тај услов није испуњен, цела карактеристична једначина се дели са a_n ;
- потребно је да и сви коефицијенти у карактеристичној једначини буду истог знака (сви “+” или “-”). Уколико је овај услов испуњен сматра се да је то потребан али не и довољан услов за стабилност система.

7.1. Хурвицов алгебарски критеријум

За испитивање стабилности неког система, на основу карактеристичне једначине за тај система, формира се тзв. Хурвицова детерминанта:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Да би систем био стабилан потребно је испунити два услова:

- да су сви коефицијенти истог знака:

$$a_k > 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$a_k < 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- да сваки главни узастопни дијагонални минори Хурвицове детерминанте (уоквирене субдетерминанте у Хурвицовиј детерминанти) морају бити већи од нуле. Уколико је неки од минора мањи од нуле систем је нестабилан, а ако је једнак нули систем је гранично стабилан:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta_h > 0.$$

7.2. Роутов алгебарски критеријум

Примена Роутовог критеријума подразумева формирање специфичне шеме, где су прве две врсте састављене од коефицијената карактеристичне једначине, а остали се рачунају по одређеним обрасцима:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$	
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$	
s^{n-2}	A_1	A_2	A_3	$\dots$	
s^{n-3}	B_1	B_2	B_3	$\dots$	
s^{n-4}	C_1	C_2	C_3	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
s^0	H_h				

$A_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}; A_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}; \dots$
 $B_1 = \frac{A_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot A_2}{A_1}; B_2 = \frac{A_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot A_3}{A_1}; \dots$
 $C_1 = \frac{B_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot B_2}{B_1}; C_2 = \frac{B_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot B_3}{B_1}; \dots$

И остале колоне формирају се на исти начин све до последње врсте која има само један члан H_1 .

Да би систем био стабилан потребно је испунити два услова:

- да су сви коефицијенти истог знака:

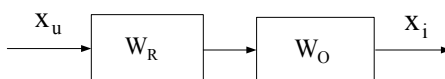
$$a_k > 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$a_k < 0 \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

- да сви елементи прве колоне, Роутове шеме, буду истог знака.

7.3. Најквистов критеријум

Уз помоћ Најквистовог критеријума, а на основу познавања фреквентне карактеристике отвореног кола слика 7.1, испитује се стабилност затвореног система (систем се посматра без спољних дејстава).



Слика 7.1. Отворено коло система без повратне спреге

Преносна функција овог отвореног кола је:

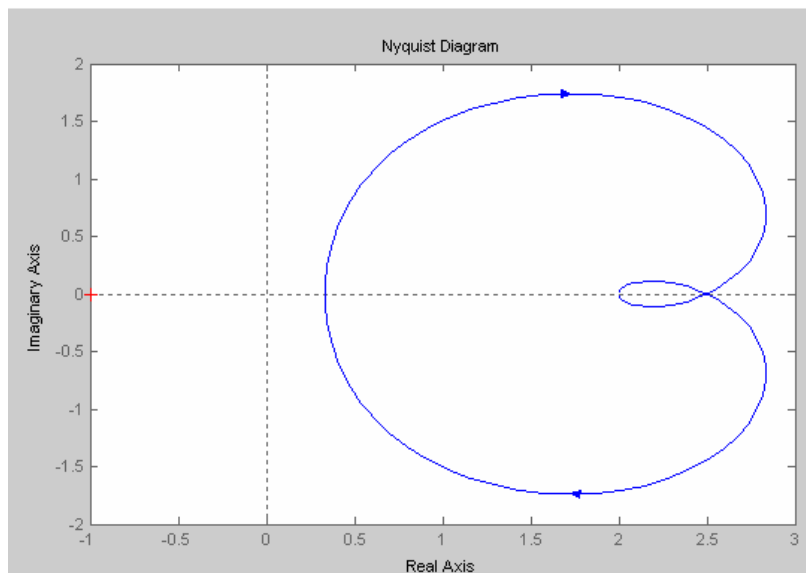
$$W_{ok}(s) = W_R(s)W_O(s).$$

А његова фреквентна карактеристика:

$$F_{ok}(j\omega) = F_R(j\omega)F_O(j\omega).$$

Посебан Најквистов критеријум гласи: Ако је отворено коло (коло без повратне спреге са слике 7.1) стабилно, онда је за стабилност целог система потребно и довољно да део ходографа фреквентне карактеристике $F_{ok}(j\omega)$ отвореног кола при промени ω (од 0 до $+\infty$), нити прође, нити обухвати тачку $(-1, j0)$.

Изглед ходографа фреквентне карактеристике (Најквистов дијаграм) дат је на слици 7.2.



Слика 7.2. Ходограф фреквентне карактеристике у Matlab-у

Matlab code :

```
( >> I = [2  5  1];
  >> U = [1  2  3];
  >> W = tf(I,U)
  ltiview({'nyquist'}, W)
  returns )
```

7.4. Бодеов критеријум

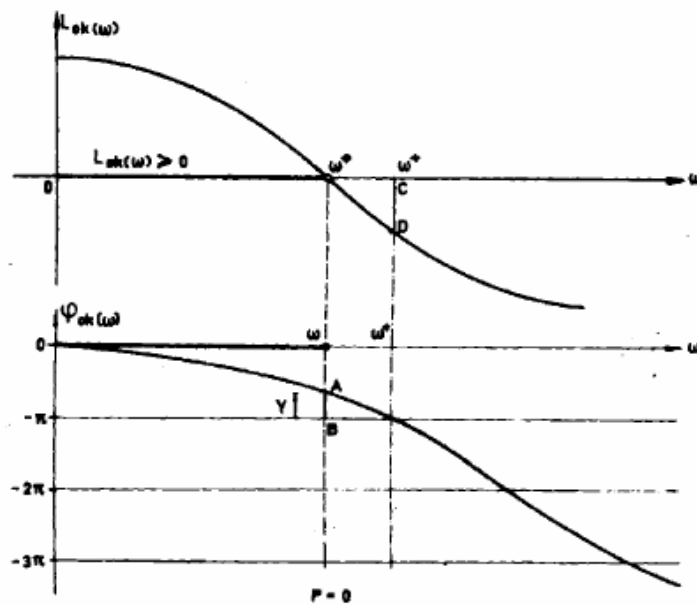
Ходограф фреквентне карактеристике $F_{ok}(j\omega)$ отвореног кола система регулисања може да се преслика у дијаграме логаритамска амплитудно-фреквентне карактеристике $L_{ok}(\omega)$ и фазно-фреквентне карактеристике $\phi_{ok}(\omega)$ тог отвореног кола. Овакав ходограф се једним именом назива Бодеов дијаграм.

Боде је заправо формулисао Најквистов критеријум помоћу $L_{ok}(\omega)$ и $\phi_{ok}(\omega)$, па Бодеова теорема о стабилности система са повратном спрегом гласи:

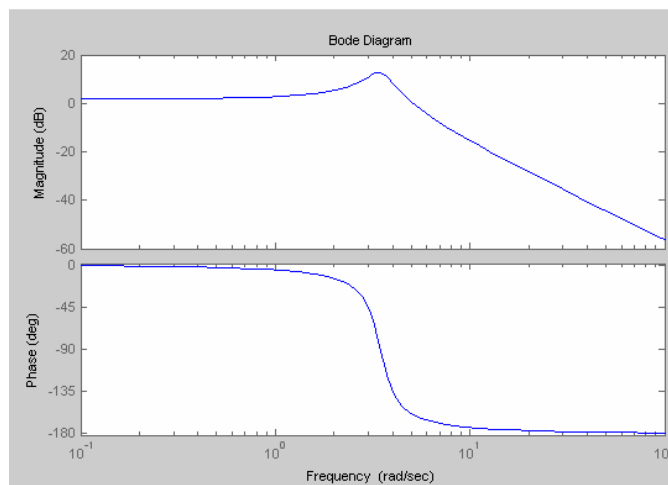
Отворено коло система са повратном спрегом је стабилно, ако је његова логаритамска амплитудно-фреквентна карактеристика $L_{ok}(\omega)$ има само једну нулу, а

фазно-фреквентна карактеристика $\varphi_{ok}(\omega)$ има највише по једну заједничку тачку са сваком правом $\varphi = (2m + 1)\pi$. Да би систем са повратном спрегом био стабилан, потребно је и довољно да фазно-фреквентна карактеристика $\varphi_{ok}(\omega)$ не сече нити додирује $\varphi = (2m + 1)\pi$ за свако ω за које је $L_{ok}(\omega) > 0$.

На слици 7.3. дат је Бodeов дијаграм који задовољава напред изнешену теорему, а на слици пример Бodeовог дијаграма дат у Matlab-у.



Слика 7.3. Бodeов дијаграм стабилног система са повратном спрегом



Слика 7.4. Пример Бodeовог дијаграма у Matlab-у

Matlab code :

```
(
>> I = [15];
>> U = [1 1 12];
>> W = tf(I, U)
ltiview({'bode'}, W)
returns
)
```

7.5. Алгебарско одређивање стабилности система (примери решених задатака)

Задатак 1.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$(s + 3)^3 = 0,$$

испитати стабилност применом Хурвицовог критеријума.

Решење:

Карактеристична једначина се може трансформисати помоћу обрасца:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

па одатле карактеристична једначина гласи:

$$s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0.$$

Први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

Затим се на основу почетне карактеристичне једначине формира Хурвицова детерминанта за $n = 3$:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 27 & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

По Хурвицовом критеријуму потребно је да сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте буду већи од нуле да би систем био стабилан. За дату карактеристичну једначину ($n = 3$) а самим тим и на основу Хурвицове детерминанте формирају се три субдетерминанте:

$$\Delta_1 = |a_2| = |9| > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = 9 \cdot 27 - 27 = 216 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 27 & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & 9 & 27 \end{vmatrix} = 9(27^2 - 0) - 27(27 - 0) + 0 = 216 > 0.$$

Како су сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте већи од нуле, задовољен је и други услов Хурвицовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 2.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$2s^3 + 6s^2 + 2s + 4 = 0,$$

испитати стабилност применом Хурвицовог критеријума.

Решење:

Карактеристична једначина се може поделити са бројем 2, како би коефицијент испред највећег степена био једнак јединици ($a_n = 1$):

$$2s^3 + 6s^2 + 2s + 4 = 0 \quad | \div 2,$$

па одатле карактеристична једначина гласи:

$$s^3 + 3s^2 + s + 2 = 0.$$

Први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

Затим се на основу почетне карактеристичне једначине формира Хурвицова детерминанта за $n = 3$:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

По Хурвицовом критеријуму потребно је да сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте буду већи од нуле да би систем био стабилан. За дату карактеристичну једначину ($n = 3$) а самим тим и на основу Хурвицове детерминанте формирају се три субдетерминанте:

$$\Delta_1 = |a_2| = |3| > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(2 - 0) - 2(2 - 0) + 0 = 2 > 0.$$

Како су сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте већи од нуле, задовољен је и други услов Хурвицовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 3.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$s^3 + 80s^2 + 220 = 0,$$

испитати стабилност применом Хурвицовог критеријума.

Решење:

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 80s^2 + 220 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

Затим се на основу почетне карактеристичне једначине формира Хурвицова детерминанта за $n = 3$:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80 & 220 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 220 \end{vmatrix}$$

По Хурвицовом критеријуму потребно је да сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте буду већи од нуле да би систем био стабилан. За дату карактеристичну једначину ($n = 3$) а самим тим и на основу Хурвицове детерминанте формирају се три субдетерминанте:

$$\Delta_1 = |a_2| = |80| > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 80^+ & 220^- \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 220 \cdot 1 = -220 < 0;$$

Како је вредност субдетерминанте $\Delta_2 < 0$, други услов Хурвицовог критеријума није задовољен, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, нестабилан.

Задатак 4.

За систем дефинисан преносном функцијом:

$$W(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 + 3s^2 + 8s + 6},$$

испитати стабилност Хурвицовим критеријумом:

Решење:

Карактеристична функција датог система се добија када се имениоц преносне функције тог система изједначи са нулом:

$$s^3 + 3s^2 + 8s + 6 = 0.$$

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 3s^2 + 8s + 6 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

Затим се на основу почетне карактеристичне једначине формира Хурвицова детерминанта за $n = 3$:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

По Хурвицовом критеријуму потребно је да сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте буду већи од нуле да би систем био стабилан. За дату карактеристичну једначину ($n = 3$) а самим тим и на основу Хурвицове детерминанте формирају се три субдетерминанте:

$$\Delta_1 = |a_2| = |3| > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^+ & 6^- \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 18 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3^+ & 6^- & 0^+ \\ 1 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(48 - 0) - 6(6 - 0) + 0 = 108 > 0.$$

Како су сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте већи од нуле, задовољен је и други услов Хурвицовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 5.

За систем чија је карактеристичана једначина дефинисана изразом:

$$s^3 + 7s^2 + 14s + 210 = 0,$$

испитати стабилност применом Хурвицовог критеријума.

Решење:

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 7s^2 + 14s + 210 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

Затим се на основу почетне карактеристичне једначине формира Хурвицова детерминанта за $n = 3$:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 210 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 210 \end{vmatrix}$$

По Хурвицовом критеријуму потребно је да сви дијагонални минори Хурвицове детерминанте буду већи од нуле да би систем био стабилан. За дату карактеристичну једначину ($n = 3$) а самим тим и на основу Хурвицове детерминанте формирају се три субдетерминанте:

$$\Delta_1 = |a_2| = |7| > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7^+ & 210^- \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 7 \cdot 14 - 210 \cdot 1 = -112 < 0;$$

Како је вредност субдетерминанте $\Delta_2 < 0$, други услов Хурвицовог критеријума није задовољен, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, нестабилан.

Задатак 6.

За систем чија је карактеристичана једначина дефинисана изразом:

$$s^3 + 7s^2 + 6s + 14 = 0,$$

испитати стабилност применом Роутовог критеријума.

Решење:

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 7s^2 + 6s + 14 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

На основу дате карактеристичне једначине се даље формира тзв. Роутова специфична шема за $n = 3$:

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\ s^2 & a_2 & a_0 & 0 \\ s^1 & A_1 & A_2 & \\ s^0 & B_1 & B_2 & \end{array} \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = \frac{7 \cdot 6 - 1 \cdot 14}{7} = 4; \\ A_2 &= \frac{a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{a_2} = 0; \\ B_1 = H_1 &= \frac{A_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot A_2}{A_1} = \frac{4 \cdot 14 - 7 \cdot 0}{4} = 14; \\ B_2 &= \frac{A_1 \cdot 0 - a_2 \cdot A_3}{A_1} = \frac{4 \cdot 0 - 7 \cdot 0}{4} = 0. \end{aligned}$$

Када се добијене вредности замене у Роутовој шеми, добија се:

$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & 6 & 0 \\ s^2 & 7 & 14 & 0 \\ s^1 & 4 & 0 & \\ s^0 & 14 & 0 & \end{array}$$

Како су сви чланови прве колоне Роутове шеме истог знака, тада је испуњен и други услов Роутовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 7.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$s^3 + 2s^2 + 120s + 800 = 0,$$

испитати стабилност применом Роутовог критеријума.

Решење:

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 2s^2 + 120s + 800 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

На основу дате карактеристичне једначине се даље формира тзв. Роутова специфична шема за $n = 3$:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
 s^2 & a_2 & a_0 & 0 \\
 s^1 & A_1 & A_2 & \\
 s^0 & B_1 & B_2 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = \frac{2 \cdot 120 - 1 \cdot 800}{2} = -280; \\
 A_2 &= \frac{a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{a_2} = 0; \\
 B_1 = H_1 &= \frac{A_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot A_2}{A_1} = \frac{-280 \cdot 800 - 2 \cdot 0}{-280} = 800; \\
 B_2 &= \frac{A_1 \cdot 0 - a_2 \cdot A_3}{A_1} = \frac{-280 \cdot 0 - 2 \cdot 0}{-280} = 0.
 \end{aligned}$$

Када се добијене вредности замене у Роутовој шеми, добија се:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^3 & 1 & 120 & 0 \\
 s^2 & 2 & 800 & 0 \\
 s^1 & -280 & 0 & \\
 s^0 & 800 & 0 &
 \end{array}$$

Како је члан A_1 супротног знака у односу на остале чланове прве колоне Роутове шеме, није испуњен други услов Роутовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, нестабилан.

Задатак 8.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$s^3 + (5s + 10)(3s + 7) + 135 = 0,$$

испитати стабилност применом Роутовог критеријума.

Решење:

Карактеристична једначина се може изразити и као:

$$s^3 + 15s^2 + 65s + 205 = 0,$$

пошто су сви коефицијенти овако добијене карактеристичне једначине једнаког знака задовољен је први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума.

На основу дате карактеристичне једначине се даље формира тзв. Роутова специфична шема за $n = 3$:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
 s^2 & a_2 & a_0 & 0 \\
 s^1 & A_1 & A_2 & \\
 s^0 & B_1 & B_2 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = \frac{15 \cdot 65 - 1 \cdot 205}{15} = \frac{154}{3}; \\
 A_2 &= \frac{a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{a_2} = 0; \\
 B_1 = H_1 &= \frac{A_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot A_2}{A_1} = \frac{\frac{154}{3} \cdot 205 - 15 \cdot 0}{\frac{154}{3}} = 205; \\
 B_2 &= \frac{A_1 \cdot 0 - a_2 \cdot A_3}{A_1} = \frac{\frac{154}{3} \cdot 0 - 15 \cdot 0}{\frac{154}{3}} = 0.
 \end{aligned}$$

Када се добијене вредности замене у Роутовој шеми, добија се:

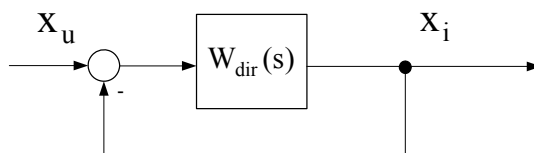
$$\begin{array}{l|lll} s^3 & 1 & 65 & 0 \\ s^2 & 15 & 205 & 0 \\ s^1 & 154/3 & 0 & \\ s^0 & 205 & 0 & \end{array}$$

Како су сви чланови прве колоне Роутове шеме истог знака, тада је испуњен и други услов Роутовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 9.

За систем са негативном повратном спрегом приказан на слици 7.5., за који је дата преносна функција директне гране изразом:

$$W_{\text{dir}}(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+3)},$$



Слика 7.5. Систем са негативном повратном спрегом

испитати стабилност применом Роутовог критеријума.

Решење:

Преносна функција система са негативном повратном спрегом се добија:

$$W(s) = \frac{W_{\text{dir}}(s)}{1 + W_{\text{dir}}(s)} = \frac{\frac{6}{s(s+1)(s+3)}}{1 + \frac{6}{s(s+1)(s+3)}} = \frac{\frac{6}{s(s+1)(s+3)}}{\frac{s(s+1)(s+3) + 6}{s(s+1)(s+3)}} = \frac{6}{s^3 + 4s^2 + 3s + 6}$$

Карактеристична функција датог система се добија када се имениоц преносне функције тог система изједначи са нулом:

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 6 = 0.$$

За карактеристичну једначину

$$s^3 + 4s^2 + 3s + 6 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

На основу дате карактеристичне једначине се даље формира тзв. Роутова специфична шема за $n = 3$:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
 s^2 & a_2 & a_0 & 0 \\
 s^1 & A_1 & A_2 & \\
 s^0 & B_1 & B_2 &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0}{a_2} = \frac{4 \cdot 3 - 1 \cdot 6}{4} = \frac{6}{4} = 1,5; \\
 A_2 &= \frac{a_2 \cdot 0 - a_3 \cdot 0}{a_2} = 0; \\
 B_1 = H_1 &= \frac{A_1 \cdot a_0 - a_2 \cdot A_2}{A_1} = \frac{1,5 \cdot 6 - 4 \cdot 0}{1,5} = 6; \\
 B_2 &= \frac{A_1 \cdot 0 - a_2 \cdot A_3}{A_1} = \frac{1,5 \cdot 0 - 4 \cdot 0}{1,5} = 0.
 \end{aligned}$$

Када се добијене вредности замене у Роутовој шеми, добија се:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^3 & 1 & 3 & 0 \\
 s^2 & 4 & 6 & 0 \\
 s^1 & 1,5 & 0 & \\
 s^0 & 6 & 0 &
 \end{array}$$

Како су сви чланови прве колоне Роутове шеме истог знака, тада је испуњен и други услов Роутовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

Задатак 10.

За систем чија је карактеристична једначина дефинисана изразом:

$$s^4 + 6s^3 + 20s^2 + 100s + 240 = 0,$$

испитати стабилност применом Роутовог критеријума.

Решење:

За карактеристичну једначину

$$s^4 + 6s^3 + 20s^2 + 100s + 240 = 0,$$

први потребан али не и довољан услов Хурвицовог критеријума је испуњен, јер су сви коефицијенти карактеристичне једначине једнаког знака.

На основу дате карактеристичне једначине се даље формира тзв. Роутова специфична шема за $n = 4$:

$$\begin{array}{l|lll}
 s^4 & a_4 & a_2 & a_0 \\
 s^3 & a_3 & a_1 & 0 \\
 s^2 & A_1 & A_2 & \\
 s^1 & B_1 & B_2 & \\
 s^0 & C_1 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{a_3 \cdot a_2 - a_4 \cdot a_1}{a_3} = \frac{6 \cdot 20 - 1 \cdot 100}{2} = 20; \\
 A_2 &= \frac{a_3 \cdot a_0 - a_4 \cdot 0}{a_3} = 240; \\
 A_3 &= 0; \\
 B_1 &= \frac{A_1 \cdot a_1 - a_3 \cdot A_2}{A_1} = \frac{20 \cdot 100 - 6 \cdot 240}{20} = 28; \\
 B_2 &= \frac{A_1 \cdot 0 - a_2 \cdot A_3}{A_1} = \frac{20 \cdot 0 - 20 \cdot 0}{20} = 0 \\
 C_1 &= \frac{B_1 \cdot A_2 - A_1 \cdot B_2}{B_1} = \frac{28 \cdot 240 - 20 \cdot 0}{28} = 240.
 \end{aligned}$$

Када се добијене вредности замене у Роутовој шеми, добија се:

$$\begin{array}{l|lll} s^4 & 1 & 20 & 240 \\ s^3 & 6 & 100 & 0 \\ s^2 & 20 & 240 & \\ s^1 & 28 & 0 & \\ s^0 & 240 & & \end{array}$$

Како су сви чланови прве колоне Роутове шеме истог знака, тада је испуњен и други услов Роутовог критеријума, па је систем, дефинисан датом карактеристичном једначином, стабилан.

ЛИТЕРАТУРА

ДОДАТАК

Табела 1.

P.б.	$f(t)$	$F(s)$	P.б.	$f(t)$	$F(s)$
1.	$\delta(t)$	1	11.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
2.	$\delta(t - \tau)$	e^{-Ts}	12.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
3.	$h(t)$	$\frac{1}{s}$	13.	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
4.	$h(t - \tau)$	$\frac{e^{-Ts}}{s}$	14.	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
5.	t	$\frac{1}{s^2}$	15.	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$
6.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	16.	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
7.	$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mp a}$	17.	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
8.	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	18.	$\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
9.	$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	19.	$\frac{a}{b} + (1 - \frac{a}{b})e^{-bt}$	$\frac{s+a}{s(s+b)}$
10.	$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	20.	$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - a \cdot t \cdot e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$

Табела 2.

1.	Теорема линеарности	$\mathcal{L}[a \cdot f(t)] = a \cdot F(s)$ $\mathcal{L}[a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t)] = a \cdot F_1(s) + b \cdot F_2(s)$
2.	Чисто временско кашњење	$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = F(s) \cdot e^{-s\tau}$
3.	Померање комплексног лика	$\mathcal{L}[e^{-\sigma t} f(t)] = F(s) \cdot (s + \sigma)$
4.	Конволуција оригинала	$f(t) = \int f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$ $\mathcal{L}[f(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$
5.	Теорема о изводу оригинала	$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0_-)$ $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0_-)$ где су $f^{(k)}(0_-)$ почетни услови који су код каузалних система једнаки нули
6.	Теорема о интегралу оригинала	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s}$ $\mathcal{L}\left[\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s^n}, n = 0, 1, 2, \dots$
7.	Прва гранична теорема	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0)$
8.	Друга гранична теорема	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$

Табела 3.

P.б	Правило	Дијаграм	Еквивалентни дијаграм	Једначина
1.	Упрошћавање блок дијаграма редне спреге			$X_2 = W_1 W_2 X_1$
2.	Упрошћавање блок дијаграма повратне спреге			$X_2 = \frac{W_1}{1 \pm W_1 W_2} X_1$
3.	Упрошћавање блок дијаграма паралелне спреге			$X_2 = (W_1 \pm W_2) X_1$
4.	Премештање тачке гранања са излаза на улаз блока			$X_2 = X_3 = W X_1$
5.	Премештање тачке гранања са улаза на излаз блока			$X_2 = W X_1$ $X_1 = X_3$
6.	Премештање сабирача са излаза на улаз блока			$X_2 = W_1 X_1 \pm W_2 X_3$
7.	Премештање блока повратног кола			$X_2 = \frac{W_1}{1 \mp W_1 W_2} X_1$

8.	Премештање блока паралелног кола			$X_2 = (W_1 \pm W_2)X_1$
9.	Померање повратне спреге иза блока			$X_2 = WX_1$
10.	Померање повратне спреге испред блока			$X_2 = WX_1$
11.	Померање сабирача код повратне спреге испред блока			$X_2 = WX_1 \pm X_3$
12.	Померање сабирача иза блока			$X_2 = W(X_1 \pm X_3)$
13.	Померање повратне спреге испред сабирача			$X_2 = X_1 \pm X_3$
14.	Померање повратне спреге иза дискриминатора			$X_2 = X_1 \pm X_3$
15.	Комутација променљивих			$X_2 = X_1 \pm X_3 \pm X_4$

